

## Übungsblatt 8

### Aufgabe 1 (2 Punkte)

Sei  $Y$  eine kompakte Riemannsche Fläche und  $f: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$  eine zusammenhängende Überlagerung, die über genau zwei Punkten verzweigt ist.

Zeigen Sie:  $Y$  hat Geschlecht 0.

### Aufgabe 2 (2 Punkte)

Sei  $p: X \rightarrow Y$  eine Überlagerung von Riemannschen Flächen,  $x \in X$  ein Verzweigungspunkt und  $\gamma$  ein Weg, der in einer beliebig kleinen Umgebung von  $x$  einmal um  $x$  herum läuft. Zeigen Sie, dass die Verzweigungsordnung von  $x$  gleich der Ordnung des Bildes von  $\gamma$  unter der Monodromieabbildung der zugehörigen unverzweigten Überlagerung ist.

### Aufgabe 3 (4 Punkte)

- Berechnen Sie mithilfe des Satzes von Riemann-Hurwitz das Geschlecht der Wollmilchsau.
- Sei  $O$  ein Origami mit  $d$  Quadraten und  $e$  Ecken. Zeigen Sie  $g(O) = \frac{d-e}{2} + 1$ .
- Berechnen Sie das Geschlecht der Wollmilchsau noch einmal mit der Formel aus (b).

### Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei  $\text{Mon}: \pi_1(T \setminus \{\infty\}) \rightarrow S_d$  ein Gruppenhomomorphismus so, dass das Bild transitiv auf  $\{1, \dots, d\}$  operiert.

Finden Sie ein Origami, sodass die zu der unverzweigten Überlagerung  $O \setminus \Sigma \rightarrow T \setminus \{\infty\}$  gehörige Monodromieabbildung  $\text{Mon}$  ist.

Was für eine Auswirkung hat die Transitivität des Bildes auf die Überlagerung?

### Aufgabe 5 (4 Punkte)

Sei  $H$  eine Index  $d$  Untergruppe von  $F_n$ . Zeigen Sie, dass  $H$  frei vom Rang  $d(n-1) + 1$ . Gehen sie dabei wie folgt vor:

Identifizieren Sie  $F_n$  mit  $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{x_1, \dots, x_{n+1}\})$  und zeigen Sie, dass die zu  $H$  zugehörige unverzweigte Überlagerung von  $\mathbb{P}^1 \setminus \{x_1, \dots, x_{n+1}\}$  sich zu einer verzweigten Überlagerung von  $\mathbb{P}^1$  fortsetzen lässt. Benutzen Sie diese verzweigte Überlagerung um die Behauptung zu zeigen.

*Anmerkung:* Man kann allgemein zeigen, dass jede beliebige Untergruppe einer freien Gruppe wieder frei ist.