Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2025/26
9. Dezember 2025

Riemannsche Flächen
Prof. Dr. Martin Möller
Lukas Schneider

Übungsblatt 9

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Ist $\omega := u\mathrm{d}z + v\mathrm{d}\overline{z}$, so gilt

$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial \overline{z}}\right) \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\overline{z}.$$

(b) Sei $f\colon X \to \mathbb{C}$ eine C^1-Abbildung und ω eine C^1-Form auf X.

Zeigen Sie, dass $\mathrm{d}(f\omega) = \mathrm{d}f \wedge \omega + f\mathrm{d}\omega$ gilt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass es eine eindeutige meromorphe 1-Form ω auf $\mathbb{P}^1$ gibt, die die 1-Form $\mathrm{d}z$ auf $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{P}^1$ fortsetzt und dass $\operatorname{ord}_\infty \omega = -2$ ist.

(b) Sei $f\colon z \mapsto \frac{(z+1)^2}{z-1}$ und ω die Fortsetzung von $\mathrm{d}f$ auf $\mathbb{P}^1$.

Bestimmen Sie $\operatorname{ord}_p \omega$ für alle $p \in \mathbb{P}^1$.

(c) Sei $Y = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 = x(x-1)(x-2)\}$.

Setzen Sie die Differentialform $\mathrm{d}x$ von $Y \setminus \{y = 0\}$ auf ganz Y fort und bestimmen Sie $\operatorname{ord}_p \mathrm{d}x$ für alle $p \in Y$.

Zeigen Sie außerdem, dass $\frac{\mathrm{d}x}{y}$ eine holomorphe 1-Form auf Y ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Sei T der komplexe Torus, der durch verkleben des Einheitsquadrates hervor geht.

Zeigen Sie: die 1-Form $\mathrm{d}z$ auf $\mathbb{C}$ liefert nach Verkleben eine wohldefinierte 1-Form ω auf T.

(b) Sei $\Lambda := \langle 1, \tau \rangle \subset \mathbb{C}$ ein Gitter und $\pi\colon \mathbb{C} \to X := \mathbb{C}/\Lambda$ die Projektion. Sei weiterhin $\lambda \in \Lambda$ ein Gitterpunkt und $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}/\Lambda$, $\gamma(t) = \pi(t\lambda)$ eine Schleife.

Berechnen Sie $\displaystyle\int_\gamma \mathrm{d}z$ und $\displaystyle\int_X \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\overline{z}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $f\colon D' \to \mathbb{C}$ eine meromorphe Funktion auf einem Gebiet $D' \subseteq \mathbb{C}$. Zu einem Punkt $z_0 \in D'$ sei $\operatorname{Res}(f\mathrm{d}z, z_0)$ das Residuum um z_0, d.h. der -1-Laurentkoeffizient.

(a) Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, so dass $\overline{D} \subset D'$ ist, ∂D stückweise $\mathcal{C}^1$ ist und keine Null- oder Polstellen von f enthält.

Zeigen Sie: $\displaystyle \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial D} f\mathrm{d}z = \sum_{z_0 \in D} \operatorname{Res}(f\mathrm{d}z, z_0)$.

Folgern Sie, dass das Residuum $\operatorname{Res}(\omega, p)$ einer meromorphen Differentialform ω um einen Punkt p auf einer Riemannschen Fläche X wohldefiniert ist.

(b) Sei ω eine meromorphe Differentialform auf einer kompakten Riemannschen Fläche X.

Zeigen Sie: Die Summe der Residuen von ω ist 0.

(c) Sei $f \neq 0$ nun eine meromorphe Funktion auf X.

Zeigen Sie: $\displaystyle \sum_{p \in X} \operatorname{ord}_p(f) = 0$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst: $\operatorname{Res}(\frac{\mathrm{d}f}{f}, p) = \operatorname{ord}_p(f)$.

Abgabe bis Beginn der Übung um **14:00** am **Dienstag, den 16. Dezember**.