Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2025/26
9. Dezember 2025

Riemannsche Flächen
Prof. Dr. Martin Möller
Lukas Schneider

Übungsblatt 9

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Ist $\omega := u\mathrm{d}z + v\mathrm{d}\overline{z}$, so gilt

$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial \overline{z}}\right) \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\overline{z}.$$

(b) Sei $f\colon X \to \mathbb{C}$ eine C^1-Abbildung und ω eine C^1-Form auf X.

Zeigen Sie, dass $\mathrm{d}(f\omega) = \mathrm{d}f \wedge \omega + f\mathrm{d}\omega$ gilt.

Lösungsvorschlag

(a) Nach Definition ist

$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}\right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

wobei $u = \frac{1}{2}(\alpha - \mathrm{i}\beta)$ und $v = \frac{1}{2}(\alpha + \mathrm{i}\beta)$ sind. Offenbar gilt

$$\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\overline{z} = (\mathrm{d}x + \mathrm{i}\mathrm{d}y) \wedge (\mathrm{d}x - \mathrm{i}\mathrm{d}y) = -\mathrm{i}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{i}\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x = -2\mathrm{i}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

da $\wedge$ alternierend ist. Nach Definition gilt aber auch

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)(\alpha + \mathrm{i}\beta) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(\alpha - \mathrm{i}\beta).$$

Insbesondere gilt also:

$$\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial \overline{z}} = \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\beta - \frac{\partial}{\partial y}\alpha\right)$$

und daraus folgt die Behauptung.

(b) Sei wieder $\omega = \alpha\mathrm{d}x + \beta\mathrm{d}y$. Wir rechnen nach und sehen:

$$\mathrm{d}(f\omega) = \left(\frac{\partial(f\beta)}{\partial x} - \frac{\partial(f\alpha)}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\beta + f\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\alpha - f\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

nach der Leibniz-Regel. Andererseits ist

$$\mathrm{d}f \wedge \omega = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y\right) \wedge (\alpha\mathrm{d}x + \beta\mathrm{d}y) = \frac{\partial f}{\partial x}\beta\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial y}\alpha\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x$$

und

$$f\mathrm{d}\omega = \left(f\frac{\partial \beta}{\partial x} - f\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

Da $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = -\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x$ folgt die Behauptung.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass es eine eindeutige meromorphe 1-Form ω auf $\mathbb{P}^1$ gibt, die die 1-Form $\mathrm{d}z$ auf $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{P}^1$ fortsetzt und dass $\operatorname{ord}_\infty \omega = -2$ ist.

(b) Sei $f\colon z \mapsto \frac{(z+1)^2}{z-1}$ und ω die Fortsetzung von $\mathrm{d}f$ auf $\mathbb{P}^1$.

Bestimmen Sie $\operatorname{ord}_p \omega$ für alle $p \in \mathbb{P}^1$.

(c) Sei $Y = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 = x(x-1)(x-2)\}$.

Setzen Sie die Differentialform $\mathrm{d}x$ von $Y \setminus \{y = 0\}$ auf ganz Y fort und bestimmen Sie $\operatorname{ord}_p \mathrm{d}x$ für alle $p \in Y$.

Zeigen Sie außerdem, dass $\frac{\mathrm{d}x}{y}$ eine holomorphe 1-Form auf Y ist.

Lösungsvorschlag

(a) Auf der anderen Karte gilt $\mathrm{d}\frac{1}{z} = -\frac{\mathrm{d}z}{z^2}$ nach der Leibniz-Regel.

(b) Offenbar ist $\mathrm{d}f = f'(z)\mathrm{d}z$ und

$$f'(z) = \frac{(z+1)(z-3)}{(z-1)^2},$$

also ist f lokal um -1 und 3 der Form $z \mapsto z^2$ und um $p \in \mathbb{C} \setminus 1$ der Form $z \mapsto z$. Daher ist

$$\operatorname{ord}_{\{-1,3\}} \mathrm{d}f = \operatorname{ord}_0 \mathrm{d}(z^2) = \operatorname{ord}_0 2z\mathrm{d}z = 1$$

und $0 = \operatorname{ord}_0 \mathrm{d}z = \operatorname{ord}_p \omega$ für $p \in \mathbb{C} \setminus 1$. Bei 1 hat f' eine doppelte Polstelle, also ist $\operatorname{ord}_1 \omega = -2$ und auf der Karte um ∞ gilt

$$\mathrm{d}f\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{f'(\frac{1}{z})}{z^2}\mathrm{d}z = \frac{1}{z^2}\frac{(1+z)(1-3z)}{(1-z)^2}\mathrm{d}z \implies \operatorname{ord}_\infty \omega = -2.$$

(c) Wir hatten bereits gesehen, dass x auf $Y \setminus \{y = 0\}$ eine Karte ist. Dort gilt also $\operatorname{ord}_p \mathrm{d}x = 0$.

Um den Punkt $(0,0)$ können wir lokal eine holomorphe Wurzel $w(x) \neq 0$ mit $w(x)^2 = (x-1)(x-2)$ ziehen und setzen $\tilde{y} := y/w(x)$. Dann ist lokal um $(0,0)$

$$x = \tilde{y}^2 \implies \operatorname{ord}_{(0,0)} \mathrm{d}x = \operatorname{ord}_{(0,0)} \mathrm{d}\tilde{y}^2 = \operatorname{ord}_{(0,0)} 2\tilde{y}\mathrm{d}\tilde{y} = 1.$$

Genauso gehen wir an den Punkten $(1,0)$ und $(2,0)$ vor, nur dass wir dort zusätzlich $\mathrm{d}x = \mathrm{d}(x-1) = \mathrm{d}(x-2)$ ausnutzen.

Folglich hat $\mathrm{d}x$ genau an den drei Weierstraßpunkten Nullstellen.

Nun zu $\frac{\mathrm{d}x}{y}$: Ist $y \neq 0$, so ist $\frac{1}{y} \neq 0$ lokal eine holomorphe Funktion. Also ist an all diesen Punkten p wieder $\operatorname{ord}_p \frac{\mathrm{d}x}{y} = 0$.

Um den Punkt $(0,0)$ herum verfahren wir wie oben: Nun ist lokal

$$\frac{\mathrm{d}x}{y} = \frac{2}{w(x)}\frac{\tilde{y}}{\tilde{y}}\mathrm{d}\tilde{y} \quad \text{also} \quad \operatorname{ord}_{(0,0)} \frac{\mathrm{d}x}{y} = 0.$$

Wie oben überträgt sich das Argument auch auf die anderen Weierstraßpunkte, $\frac{\mathrm{d}x}{y}$ ist also ein holomorphes Differential auf Y ohne Nullstellen.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Sei T der komplexe Torus, der durch verkleben des Einheitsquadrates hervor geht.

Zeigen Sie: die 1-Form $\mathrm{d}z$ auf $\mathbb{C}$ liefert nach Verkleben eine wohldefinierte 1-Form ω auf T.

(b) Sei $\Lambda := \langle 1, \tau \rangle \subset \mathbb{C}$ ein Gitter und $\pi\colon \mathbb{C} \to X := \mathbb{C}/\Lambda$ die Projektion. Sei weiterhin $\lambda \in \Lambda$ ein Gitterpunkt und $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}/\Lambda$, $\gamma(t) = \pi(t\lambda)$ eine Schleife.

Berechnen Sie $\displaystyle\int_\gamma \mathrm{d}z$ und $\displaystyle\int_X \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\overline{z}$.

Lösungsvorschlag

(a) Da alle Kartenwechsel der Form $z \mapsto z + c$ (für verschiedene $c \in \mathbb{C}$) sind und $\mathrm{d}z = \mathrm{d}(z + c)$ ist (bzw. die Ableitung der Kartenwechselabbildung, die in der Pullback-Formel auftaucht 1 ist), ist $\mathrm{d}z$ wohldefiniert.

(b) Mit dem selben Argument wie oben ist $\mathrm{d}z$ auch auf dem Quotienten $\mathbb{C}/\Lambda$ wohldefiniert. Nach Konstruktion ist außerdem $\pi^*\mathrm{d}z = \mathrm{d}z$ (als Differential auf $\mathbb{C}$) und wir können den Weg liften: Sei $\tilde{\gamma}\colon [0,1] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto t\lambda$. Dann ist $\gamma = \pi \circ \tilde{\gamma}$, also ist (mit $\alpha = \beta = 1$)

$$\int_\gamma \mathrm{d}z = \int_{\pi\circ\tilde{\gamma}} \mathrm{d}z = \int_{\tilde{\gamma}} \mathrm{d}z = \int_0^1 |\tilde{\gamma}'(t)| \mathrm{d}t = |\lambda| \int_0^1 \mathrm{d}t = |\lambda|.$$

Wir hatten bereits gesehen, dass $\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\overline{z} = -2\mathrm{i}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ ist. Somit ist

$$\int_X \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\overline{z} = -2\mathrm{i} \int_X \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = -2\mathrm{i}\det(\Lambda) \int_{[0,1]^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -2\mathrm{i}\det(\Lambda) = -2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,\tau,$$

da das Volumen der Fundamentalmasche von Λ (da die beiden Schleifen eine Lebesgue-Nullmenge sind, ist das Volumen von X gleich dem der offenen Fundamentalmasche; hierfür genügt eine einzige Karte) durch $\det(\Lambda)$ bzw. $\mathrm{Im}\,\tau$ gegeben ist (Basiswechsel zur $\mathbb{R}$-Basis, die durch die Erzeuger von Λ gegeben ist).

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $f\colon D' \to \mathbb{C}$ eine meromorphe Funktion auf einem Gebiet $D' \subseteq \mathbb{C}$. Zu einem Punkt $z_0 \in D'$ sei $\operatorname{Res}(f\mathrm{d}z, z_0)$ das Residuum um z_0, d.h. der -1-Laurentkoeffizient.

(a) Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, so dass $\overline{D} \subset D'$ ist, ∂D stückweise $\mathcal{C}^1$ ist und keine Null- oder Polstellen von f enthält.

Zeigen Sie: $\displaystyle\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial D} f\mathrm{d}z = \sum_{z_0\in D} \operatorname{Res}(f\mathrm{d}z, z_0)$.

Folgern Sie, dass das Residuum $\operatorname{Res}(\omega, p)$ einer meromorphen Differentialform ω um einen Punkt p auf einer Riemannschen Fläche X wohldefiniert ist.

(b) Sei ω eine meromorphe Differentialform auf einer kompakten Riemannschen Fläche X.

Zeigen Sie: Die Summe der Residuen von ω ist 0.

(c) Sei $f \neq 0$ nun eine meromorphe Funktion auf X.

Zeigen Sie: $\displaystyle\sum_{p\in X} \operatorname{ord}_p(f) = 0$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst: $\operatorname{Res}(\frac{\mathrm{d}f}{f}, p) = \operatorname{ord}_p(f)$.

Lösungsvorschlag

(a) Da wir ∂D als Summe von Wegen um jeweils eine Polstelle zerlegen können, genügt es den Fall zu betrachten, dass D eine einzige Polstelle enthält.

Dann können wir f auf D um z_0 als Laurent-Reihe entwickeln, dann folgt die Behauptung aus der Definition der Laurent-Reihe mittels des Cauchy'schen Integralsatzes. (Alternativ schreiben wir lokal für ein $k_0 \in \mathbb{Z}$

$$f(z) = \sum_{k\geq k_0} a_k(z-z_0)^k \implies \int_{\partial D} f\mathrm{d}z = \sum_{k\geq k_0} \int_{\partial D} a_k(z-z_0)^k$$

und $(z-z_0)^k$ hat genau dann eine Stammfunktion lokal um z_0, wenn $k \neq -1$ ist. Also verschwinden alle Summanden außer a_{-1}; dort kommt durch das Wegintegral ein Faktor $2\pi\mathrm{i}$ dazu.)

Als Wegintegral auf einer Riemannschen Fläche ist dies wohldefiniert.

(b) Sei $X' := X \setminus \{\text{kleine Kreisscheiben um die Polstellen von } \omega\}$. Dann ist ω auf X' holomorph, also $\mathrm{d}\omega = 0$ auf X'. Nach dem Satz von Stokes ist also

$$0 = \int_{X'} \mathrm{d}\omega = \int_{\partial X'} \omega = \sum_{z_0\in X} \operatorname{Res}(\omega, z_0),$$

da $\partial X'$ aus Wegen um die Polstellen $X \setminus X'$ besteht.

(c) Offenbar gilt $\frac{\mathrm{d}f}{f} = \frac{f'}{f}\mathrm{d}z$. Indem wir (in einer Karte, die p auf 0 schickt) f lokal als $f(z) = z^k g(z)$ mit g holomorph und $g(0) \neq 0$, sowie $\operatorname{ord}_p(f) = k \in \mathbb{Z}$ schreiben, ist

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{z^{k-1}(kg(z) + zg'(z))}{z^k g(z)} = \frac{1}{z}\frac{kg(z) + zg'(z)}{g(z)} = \frac{1}{z}h(z)$$

mit h holomorph und $h(0) = k$. Damit ist aber nach der Cauchy-Integralformel

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\mathrm{d}f}{f}, p\right) = \int_{\partial D} \frac{h(z)}{z} \mathrm{d}z = h(0) = k = \operatorname{ord}_p(f),$$

wobei D eine hinreichend kleine Kreisscheibe um 0 ist.

Da sich die Residuen des meromorphen Differentials $\frac{\mathrm{d}f}{f}$ zu 0 aufaddieren, folgt die Behauptung.

Abgabe bis Beginn der Übung um **14:00** am **Dienstag, den 16. Dezember**.