Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2025/26
16. Dezember 2025

Riemannsche Flächen
Prof. Dr. Martin Möller
Lukas Schneider

Übungsblatt 10

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei X ein topologischer Raum.

(a) Zu einer offenen Menge $U \subseteq X$ definieren wir

$$\mathcal{B}_X(U) \coloneqq \{f\colon U \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig und beschränkt}\}.$$

Zeigen Sie: $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ ist eine Prägarbe aber keine Garbe.

(b) Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf X und $U \subseteq X$ offen. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) Sei U_i eine offene Überdeckung von U. Sind $f, g \in \mathcal{F}(U)$ und ist $f|_{U_i} = g|_{U_i}$ für alle i, so ist $f = g$.

(ii) Ist $f \in \mathcal{F}(U)$ mit $f_p = 0$ für alle $p \in U$, so ist $f = 0$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei X ein topologischer Raum und $f\colon Y \to X$ ein lokaler Homöomorphismus, d.h. für jeden Punkt $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung U von x so, dass $f(U)$ offen ist und $f\colon U \to f(U)$ ein Homömorphismus ist. Wir definieren $\mathcal{F}_f(U) \coloneqq \{s\colon U \to Y \mid f \circ s = \mathrm{id}_U\}$. Zeigen Sie

(a) $\mathcal{F}$ ist eine Garbe von Mengen auf X.

(b) Die Mengen

- $\mathrm{Et}(X) \coloneqq \{f\colon Y \to X \text{ lokaler Homöomorphismus}\}$
- $\mathrm{Sh}(X) \coloneqq \{\text{Garben von Mengen auf } X\}$

bijektiv zueinander sind.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei X ein topologischer Raum.

(a) Geben Sie ein Beispiel für einen Raum X mit Prägarben $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ auf X an, so dass $\mathcal{F}_p \cong \mathcal{G}_p$ für alle $p \in X$, aber $\mathcal{F} \ncong \mathcal{G}$ ist.

(b) Seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Garben auf X und seien $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ Garbenmorphismen. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ist exakt.

(ii) $0 \to \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ ist für jedes offene $U \subseteq X$ exakt.

(c) Seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Garben auf X und seien $\mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0$ Garbenmorphismen. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

   (i) $\mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0$ ist exakt.

   (ii) Zu jedem $U \subseteq X$ und zu jedem $t \in \mathcal{G}(U)$ existieren eine Überdeckung U_i von U, sowie $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ so dass s_i ein Urbild von $t|_{U_i}$ ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei X ein topologischer Raum, $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X, $(I, \leq)$ ein halbgeordnete Menge und $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X. Wir definieren

$$D^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \coloneqq \prod_{i_0 < \cdots < i_p} \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_n}).$$

Zeigen Sie

(a) $\{D^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})\}_{p \in \mathbb{N}_0}$ ist ein Teilkokettenkomplex des Czech-Komplexes.

(b) Die Inklusion $\iota \colon D^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ induziert einen Isomorphismus
$$\iota^* \colon H^p_D(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to H^p_C(\mathcal{U}, \mathcal{F}).$$

Abgabe bis Beginn der Übung um **14:00** am **Dienstag, den 13. Januar 2026**.