**Goethe-Universität Frankfurt**
**Institut für Mathematik**
Wintersemester 2025/26
13. Januar 2026

**Riemannsche Flächen**
Prof. Dr. Martin Möller
Lukas Schneider

# Übungsblatt 11

## Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden. Berechnen Sie $\mathrm{H}^1(\mathbb{C} \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}, \mathbb{Z})$.

## Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $X$ eine Riemannsche Fläche.

(a) Seien $\mu_n := \{z \in \mathbb{C}^* : z^n = 1\} \subset \mathbb{C}^*$ die Gruppe der $n$-ten Einheitswurzeln und $\underline{\mu_n}$ die konstante Garbe zu $\mu_n$ auf $X$.

Zeigen Sie, dass die Sequenz $1 \to \underline{\mu_n} \to \mathcal{O}_X^* \xrightarrow{\cdot^n} \mathcal{O}_X^* \to 1$ exakt ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Sequenz $0 \to \Omega_X \to \mathcal{E}_X^{1,0} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{E}_X^{1,1} \to 0$ exakt ist.

## Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Seien $X, Y$ topologische Räume, $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung und $\mathcal{F}$ eine Garbe auf $X$. Zu einer offenen Menge $V \subseteq Y$ definieren wir $f_*\mathcal{F}(V) := \mathcal{F}(f^{-1}(V))$.

Zeigen Sie: $f_*\mathcal{F}$ ist eine Garbe auf $Y$.

(b) Sei nun $G$ eine abelsche Gruppe, $\{p\} \subset X$ mit konstanter Garbe $\underline{G}$ versehen und $\iota$ die Inklusion $\{p\} \hookrightarrow X$.

Beschreiben Sie die Schnitte der "Wolkenkratzer"-Garbe $\iota_*\underline{G}$ auf offenen Mengen, sowie ihre Halme.

## Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $X$ eine Riemannsche Fläche. Sei $\mathcal{F}$ eine Wolkenkratzergarbe (wie oben) auf $X$.

Zeigen Sie, dass $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{F}) = 0$ ist.

---

**Abgabe** bis Beginn der Übung um **14:00** am **Dienstag, den 20. Januar**.