

Übungsblatt 12

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien X eine Riemannsche Fläche, \mathcal{F}, \mathcal{G} Garben auf X und $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ein surjektiver Garbenmorphismus. Sei weiterhin $\delta: H^0(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^1(X, \text{Kern } \varphi)$ der Verbindungsmorphismus.

Zeigen Sie: Zu $g \in \mathcal{G}(X)$ gibt es genau dann ein φ_X -Urbild, wenn $\delta(g) = 0$ ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Sei $\mathcal{M}(X)$ der Körper der meromorphen Funktionen auf einer Riemannschen Fläche X .

Zeigen Sie, dass $\text{div}: \mathcal{M}(X)^\times \rightarrow \text{Div}(X)$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

(b) Zeigen Sie: $\dim H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\infty)) = 2$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1) = \mathbb{C}(z)$.

(c) Zeigen Sie: $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\infty - 0) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$.

Hinweis: Geben Sie zunächst einen nicht-konstanten globalen Schnitt an.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Gegeben Sei eine Riemannsche Fläche X durch Verkleben von

$$U_1 := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : x^4 + y^4 = 1\} \quad \text{und} \quad U_2 := \{(w, z) \in \mathbb{C}^2 : w^4 + 1 = z^4\}$$

entlang der offenen Teilmengen $U_1 \cap \{y \neq 0\}$ und $U_2 \cap \{z \neq 0\}$ vermöge der Identifikationen

$$y \longleftrightarrow \frac{1}{z} \quad \text{und} \quad x \longleftrightarrow \frac{w}{z}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildungen

$$\varphi_1: U_1 \rightarrow \mathbb{C} = \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}, (x, y) \mapsto y \quad \text{und} \quad \varphi_2: U_2 \rightarrow \mathbb{P}^1 \setminus \{0\}, (w, z) \mapsto \frac{1}{z}$$

sich zu einer holomorphen Abbildung $\varphi = y: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ verkleben.

Folgern Sie, dass X kompakt ist und bestimmen Sie $g(X)$.

(b) Bestimmen Sie $\text{div } dy$.

(c) Zeigen Sie, dass $\frac{dy}{x^2}, \frac{dy}{x^3}$ und $y \frac{dy}{x^3}$ eine Basis von $H^0(X, \Omega_X)$ bilden.

(d) Zeigen Sie, dass $\alpha: (x, y) \mapsto (ix, y), (w, z) \mapsto (iw, z)$ ein Automorphismus von X ist.

Bestimmen Sie die Fixpunkte von α , sowie $g(X/\alpha)$ und $g(X/\alpha^2)$.