Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2025/26
27. Januar 2025

Riemannsche Flächen
Prof. Dr. Martin Möller
Lukas Schneider

Übungsblatt 13

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei X eine Riemannsche Fläche und D, D' Divisoren auf X.

(a) Zeigen Sie: Für alle $p \in X$ ist
$$\mathcal{O}_X(D+D')_p \cong \mathcal{O}_X(D)_p \otimes_{\mathcal{O}_{X,p}} \mathcal{O}_X(D')_p.$$

(b) Geben Sie ein Beispiel an, wo $\mathcal{O}_X(D+D')(X) \ncong \mathcal{O}_X(D)(X) \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_X(D')(X)$ ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche und $\Omega_X^{\otimes q}$ die Garbe der q-Differentiale auf X.

(a) Zeigen Sie: $\mathrm{H}^0(X, \Omega_X^{\otimes q}) \cong \mathcal{L}(qK)$.

(b) Bestimmen Sie $\ell(qK)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Seien X, Y kompakte Riemannsche Flächen, $f\colon X \to Y$ nicht konstant und holomorph und $\omega \neq 0$ eine Differentialform auf Y.

Bestimmen Sie $\mathrm{ord}_p(f^*\omega)$ für alle $p \in X$.

(b) Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche, $G \subseteq \mathrm{Aut}(X)$ eine endliche Untergruppe und $\pi\colon X \to X/G$ die Quotientenabbildung. Weiterhin bezeichne $\mathrm{H}^0(X, \Omega_X)^G$ den G-invarianten Unterraum von $\mathrm{H}^0(X, \Omega_X)$.

Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung $\mathrm{H}^0(X/G, \Omega_{X/G}) \to \mathrm{H}^0(X, \Omega_X), \omega \mapsto \pi^*\omega$ injektiv mit Bild $\mathrm{H}^0(X, \Omega_X)^G$ ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei X die durch $U_1 : x^4 + y^4 = 1$ und $U_1 : w^4 + 1 = z^4$ gegebene Riemannsche Fläche (siehe letztes Übungsblatt). Sei weiterhin $p = (0, \mathrm{i}) \in U_1 \subset X$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{ord}_p(y - \mathrm{i})\dfrac{\mathrm{d}y}{x^3} = 4$ ist.

(b) Folgern Sie, dass X nicht hyperelliptisch ist.

Abgabe bis Beginn der Übung um **14:00** am **Dienstag, den 3. Februar**.