Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2025/26
3. Februar 2026

Riemannsche Flächen
Prof. Dr. Martin Möller
Lukas Schneider

Übungsblatt 14

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Sei G eine endliche Gruppe, die holomorph und effektiv (d.h. $G \to \mathrm{Aut}(X)$ ist injektiv) auf einer Riemannschen Fläche X operiert.

(a) Wir versehen den Bahnenraum X/G mit der Quotiententopologie.

Zeigen Sie, dass X/G Hausdorffsch ist.

(b) Zeigen Sie: Für $p \in X$ ist $\mathrm{Stab}_p(G) = \{g \in G : g(p) = p\}$ zyklisch.

(c) Zeigen Sie: $\{p \in X : \mathrm{Stab}_p(G) \neq \{0\}\}$ ist diskret.

(d) Sei $p \in X$. Zeigen Sie, dass es eine offene Umgebung U von p gibt, so dass:

  (i) U ist $\mathrm{Stab}_p(G)$-invariant;

  (ii) $U \cap g \cdot U = \emptyset$ für alle $g \notin \mathrm{Stab}_p(G)$;

  (iii) die Abbildung $\alpha\colon U/\mathrm{Stab}_p(G) \to X/G$, die durch $q \mapsto G \cdot q$ induziert wird, ist ein Homöomorphismus auf ihr Bild; und

  (iv) $\mathrm{Stab}_p(G)$ operiert frei auf $U \setminus \{p\}$.

(e) Versehen Sie X/G mit Karten, so dass $\pi\colon X \to X/G$ holomorph von Grad $|G|$ ist und der Verzweigungsindex $\mathrm{ord}_p(\pi) = |\mathrm{Stab}_p(G)|$ für alle $p \in X$ ist.

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche mit $g = g(X) \geq 2$ und Automorphismengruppe $G = \mathrm{Aut}(X)$.

(a) Zeigen Sie: Ist $g(X/G) \geq 2$, so ist $|G| \leq g - 1$.

(b) Zeigen Sie: Ist $g(X/G) = 1$, so ist $|G| \leq 4(g-1)$.

(c) Zeigen Sie die Hurwitz-Schranke: $|G| \leq 84(g-1)$.

(d) Zeigen Sie, dass eine Fläche mit $g = 2$ keinen Automorphismus von Ordnung 7 haben kann. Folgern Sie, dass die Hurwitz-Schranke nicht für jedes g angenommen wird.

Hinweis: Die Aufgabe ergibt erst so wirklich Sinn wenn man weiß, dass die Automorphismengruppe einer kompakten Riemannschen Fläche vom Geschlecht $g \geq 2$ endlich ist (siehe VL am Do oder Abschnitt 9.3 im Skript)

Abgabe bis Beginn der Übung um **14:00** am **Dienstag, den 10. Februar**.