Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2025/26
20. Januar 2026

Riemannsche Flächen
Prof. Dr. Martin Möller
Lukas Schneider

Übungsblatt 12

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien X eine Riemannsche Fläche, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ Garben auf X und $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein surjektiver Garbenmorphismus. Sei weiterhin $\delta\colon\ \mathrm{H}^0(X,\mathcal{G}) \to \mathrm{H}^1(X, \operatorname{Kern}\varphi)$ der Verbindungsmorphismus.

Zeigen Sie: Zu $g \in \mathcal{G}(X)$ gibt es genau dann ein φ_X-Urbild, wenn $\delta(g) = 0$ ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Sei $\mathcal{M}(X)$ der Körper der meromorphen Funktionen auf einer Riemannschen Fläche X.

Zeigen Sie, dass $\operatorname{div}\colon \mathcal{M}(X)^\times \to \operatorname{Div}(X)$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

(b) Zeigen Sie: $\dim \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\infty)) = 2$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1) = \mathbb{C}(z)$.

(c) Zeigen Sie: $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\infty - 0) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$.

Hinweis: Geben Sie zunächst einen nicht-konstanten globalen Schnitt an.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Gegeben Sei eine Riemannsche Fläche X durch Verkleben von

$$U_1 \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : x^4 + y^4 = 1\} \quad \text{und} \quad U_2 \coloneqq \{(w,z) \in \mathbb{C}^2 : w^4 + 1 = z^4\}$$

entlang der offenen Teilmengen $U_1 \cap \{y \neq 0\}$ und $U_2 \cap \{z \neq 0\}$ vermöge der Identifikationen

$$y \longleftrightarrow \frac{1}{z} \quad \text{und} \quad x \longleftrightarrow \frac{w}{z}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildungen

$$\varphi_1\colon U_1 \to \mathbb{C} = \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}, (x,y) \mapsto y \quad \text{und} \quad \varphi_2\colon U_2 \to \mathbb{P}^1 \setminus \{0\}, (w,z) \mapsto \frac{1}{z}$$

sich zu einer holomorphen Abbildung $\varphi = y\colon X \to \mathbb{P}^1$ verkleben.

Folgern Sie, dass X kompakt ist und bestimmen Sie $g(X)$.

(b) Bestimmen Sie $\operatorname{div} \mathrm{d}y$.

(c) Zeigen Sie, dass $\frac{\mathrm{d}y}{x^2}, \frac{\mathrm{d}y}{x^3}$ und $y\frac{\mathrm{d}y}{x^3}$ eine Basis von $\mathrm{H}^0(X, \Omega_X)$ bilden.

(d) Zeigen Sie, dass $\alpha\colon (x,y) \mapsto (\mathrm{i}x, y), (w,z) \mapsto (\mathrm{i}w, z)$ ein Automorphismus von X ist.

Bestimmen Sie die Fixpunkte von α, sowie $g(X/\alpha)$ und $g(X/\alpha^2)$.

Lösungsvorschlag

(a) Nach Definition von X verkleben sich φ_1 und φ_2 zu einer stetigen Abbildung $X \to \mathbb{P}^1$.

Die Holomorphie überprüfen wir zunächst auf U_1. Wir setzen, wie gewohnt, $F(x, y) = x^4 + y^4 - 1$ und dann ist, nach dem Satz über implizit definierte Funktionen, $y \mapsto (x = \psi(y), y)$ eine Karte um (x_0, y_0), falls $0 \neq \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = 4x_0^3$, also $x_0 \neq 0$. Folglich ist φ an all diesen Punkten holomorph und es ist $\operatorname{ord}_{(x_0,y_0)} \varphi = 1$. Ist $x_0 = 0$, so ist $y_0 \neq 0$, also auch $\frac{\partial F}{\partial y}(0, y_0) \neq 0$ und somit ist $x \mapsto (x, \psi(x))$ eine Karte. Andererseits können wir, lokal um jeden der vier Punkte $(0, y_0)$, eine holomorphe Funktion $g(x)$ mit $g(0) \neq 0$ und $x^4 = (y - y_0)g(x)$ finden, da $1 - y^4$ vier einfache Nullstellen hat; folglich ist $\psi(x) = \frac{x^4}{g(x)}$ (die Karte auf $\mathbb{C}$ ist $y \mapsto y - y_0$, um y_0 zentriert), hat also Verzweigungsgrad 4. Offenbar ist φ_1 zudem surjektiv, da es zu jedem $y \in \mathbb{C}$ ein $x \in \mathbb{C}$ gibt, so dass $x^4 = 1 - y^4$.

Auf der Karte U_2 wurden nur noch nicht die vier Punkte (w_0, z_0) betrachtet, für die $z_0 = 0$ ist. Dort ist $w_0 \neq 0$, also ist $z \mapsto (w, z)$ eine Karte. Indem wir die Karte um ∞ auf $\mathbb{P}^1$ wählen, sehen wir, dass φ_2 holomorph von Ordnung 1 an diesen Punkten ist.

Insgesamt ist φ also surjektiv und holomorph, also eine (verzweigte) Überlagerung mit endlichen Fasern; nach Satz 3.3 ist φ somit eigentlich und, da $\mathbb{P}^1$ kompakt ist, ist folglich auch X kompakt.

Offenbar ist φ von Grad 4 und nach obiger Rechnung gibt es genau vier Verzweigungspunkte (die Punkte $(0, y_0) \in U_1$), jeweils von Ordnung 4. Der Satz von Riemann-Hurwitz liefert also

$$2g(X) - 2 = 4(2g(\mathbb{P}^1) - 2) + 4(4 - 1) = -8 + 12 = 4,$$

also ist $g(X) = 3$.

(b) Wie oben gesehen ist y auf U_1 eine Koordinate, falls $x_0 \neq 0$ ist. An all solchen Punkten (x_0, y_0) ist sicherlich $\operatorname{ord}_{(x_0,y_0)} \mathrm{d}y = 0$. Um jeden der vier Punkte $p_1, \ldots, p_4$ mit $x_0 = 0$ war $y \approx x^4$, also insbesondere

$$\operatorname{ord}_{p_i} \mathrm{d}y = \operatorname{ord}_{p_i} \mathrm{d}x^4 = \operatorname{ord}_{p_i} x^3 \mathrm{d}x = 3.$$

Um jeden der vier fehlenden Punkte $q_1, \ldots, q_4$ in U_2 (also mit $z_0 = 0$) ist z eine Koordinate, also ist

$$\operatorname{ord}_{q_i} \mathrm{d}y = \operatorname{ord}_{q_i} \mathrm{d}\left(\frac{1}{z}\right) = \operatorname{ord}_{q_i} \frac{\mathrm{d}z}{z^2} = -2.$$

Insbesondere ist $\mathrm{d}y$ also kein holomorphes Differential und

$$\operatorname{div} \mathrm{d}y = \sum_{i=1}^{4} (3p_i - 2q_i).$$

(Kontrolle: $\deg \operatorname{div} \mathrm{d}y = 4 = 2g(X) - 2$.)

(c) Wir betrachten zunächst $\frac{\mathrm{d}y}{x^2}$. Offenbar ist die Ordnung wieder 0, falls $x_0 \neq 0$ ist. An den vier Punkten p_i mit $x_0 = 0$ ist

$$\operatorname{ord}_{p_i} \frac{\mathrm{d}y}{x^2} = \operatorname{ord}_{p_i} \frac{\mathrm{d}x^4}{x^2} = \operatorname{ord}_{p_i} x \mathrm{d}x = 1.$$

Auf $U_1 \cap U_2$ ist $\dfrac{\mathrm{d}y}{x^2} = \dfrac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{z}\right)}{\left(\frac{w}{z}\right)^2} = -\dfrac{\mathrm{d}z}{w^2}$, also ist an den vier Punkten $q_i \in U_2$ mit $z_0 = 0$

$$\operatorname{ord}_{q_i} \frac{\mathrm{d}z}{w^2} = 0,$$

da $w_0 \neq 0$ an den Punkten q_i. Folglich ist $\frac{\mathrm{d}y}{x^2}$ tatsächlich ein holomorphes Differential auf X.

Wir wiederholen mit gleicher Notation die Rechnungen für $\frac{\mathrm{d}y}{x^3}$. Offenbar ist auch an den Punkten p_i die Ordnung nun 0 und an den Punkten q_i ist

$$\operatorname{ord}_{q_i} \frac{\mathrm{d}y}{x^3} = \operatorname{ord}_{q_i} \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{z}\right)}{\left(\frac{w}{z}\right)^3} = \operatorname{ord}_{q_i} z\frac{\mathrm{d}z}{w^3} = 1,$$

also ist auch dies ein holomorphes Differential auf X.

Das Differential $y\frac{\mathrm{d}y}{x^3}$ hat an den vier Punkten (x_0, y_0) mit $y_0 = 0$ (also $x_0 \neq 0$) Ordnung 1, dafür keine Nullstellen an den Punkten p_i und auch an den Punkten q_i gilt

$$\operatorname{ord}_{q_i} y\frac{\mathrm{d}y}{x^3} = \operatorname{ord}_{q_i} \frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{z}\right)}{\left(\frac{w}{z}\right)^3} = \operatorname{ord}_{q_i} \frac{z}{z}\frac{\mathrm{d}z}{w^3} = 0,$$

also ist auch dieses ein holomorphes Differential.

Die drei Differentiale sind linear unabhängig, denn auf der (unendlichen) Teilmenge $\{x \neq 0\} \subset U_1$ ist jede Linearkombination der Form

$$\frac{ax + b + cy}{x^3}\mathrm{d}y, \quad a, b, c \in \mathbb{C}$$

und diese ist nur dann überall 0 wenn $a = b = c = 0$ ist. (Zum Beispiel kann man den Wert an einem Punkt (x_0, y_0) mit $(\mathrm{i}x_0, y_0)$ vergleichen und erhält so $a = 0$; dann ist es ein Polynom in y. Alternativ schreibt man lokal x als Potenzreihe in y und löst das auf.) Da $\dim \mathrm{H}^0(X, \Omega_X) = g(X) = 3$ ist, bilden die drei Formen eine Basis.

(d) Offenbar ist α ein Homöomorphismus von X. Für $y_0 \neq 0$ ist x eine Karte und folglich ist α dort holomorph mit Ordnung 1, da Multiplikation mit i ein Biholomorphismus von $\mathbb{C}$ ist. Ist $y_0 = 0$ ist $x_0 \neq 0$, also ist y eine Karte in Bild und Urbild, also ist α auch hier von Ordnung 1, genauso für $z_0 = 0$. Folglich ist α ein holomorpher Automorphismus von X.

Für einen Punkte $(x_0, y_0) \in U_1$ gilt genau dann $\alpha(x_0, y_0) = (x_0, y_0)$, wenn $x_0 = \mathrm{i}x_0$, also $x_0 = 0$ ist. Folglich sind genau diese vier Punkte die Fixpunkte, da die vier Punkte in $X \backslash U_1$ von α zyklisch permutiert werden. Die Projektion $X \mapsto X/\alpha$ ist also von Ordnung 4 und hat vier Verzweigungspunkte, jeweils von Ordnung 4. Nach Riemann-Hurwitz gilt also

$$2g(X) - 2 = 4 = 4(2g(X/\alpha) - 2) + 4(4 - 1) \implies g(X/\alpha) = 0.$$

(Tatsächlich ist die Projektionsabbildung gerade φ von oben.) α^2 hat die selben Fixpunkte wie α, allerdings ist die Projektionsabbildung hier von Grad 2, die Verzweigungsordnung ist also auch 2. Folglich ist

$$2g(X) - 2 = 4 = 2(2g(X/\alpha^2) - 2) + 4(2 - 1) \implies g(X/\alpha^2) = 1.$$

(Tatsächlich ist das Differential $\frac{\mathrm{d}y}{x^2}$ invariant unter α^2.)

Abgabe bis Beginn der Übung um **14:00** am **Dienstag, den 27. Januar**.