

# Seminar

## Das Lokal-Global-Prinzip und der Satz von Hasse–Minkowski

Sommersemester 2026

Goethe-Universität Frankfurt am Main  
Institut für Mathematik

Dr. Konstantin Jakob  
Ruth Wild

---

### Inhalt

Ziel des Seminars ist es, das Zusammenspiel von lokalen und globalen Methoden in der Zahlentheorie anhand quadratischer Gleichungen zu verstehen. Konkret untersuchen wir Gleichungen der Form

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0 \quad \text{oder} \quad x^2 + y^2 + z^2 = n,$$

mit  $a, b, c, n \in \mathbb{Z}$  und fragen, wann solche Gleichungen ganzzahlige oder rationale Lösungen besitzen.

Für homogene quadratische Gleichungen ist die nichttriviale Lösbarkeit über  $\mathbb{Z}$  äquivalent zur nichttrivialen Lösbarkeit über  $\mathbb{Q}$ . Eine bemerkenswerte Antwort auf die Frage nach der Lösbarkeit über  $\mathbb{Q}$  liefert der Satz von Hasse–Minkowski: Eine quadratische Form über  $\mathbb{Q}$  ist genau dann lösbar, wenn sie über den reellen Zahlen und über allen  $p$ -adischen Zahlen  $\mathbb{Q}_p$  lösbar ist.

Die rationalen Zahlen sind dabei ein Beispiel für einen *globalen Körper*, während  $\mathbb{R}$  und die  $p$ -adischen Zahlen Beispiele für *lokale Körper* sind. Im Seminar führen wir die  $p$ -adischen Zahlen ein, entwickeln die lokale Theorie quadratischer Formen und arbeiten auf den Satz von Hasse–Minkowski hin. Zum Abschluss behandeln wir klassische Anwendungen wie den Drei-Quadrate-Satz von Legendre und sehen an einem Gegenbeispiel, dass das Lokal-Global-Prinzip außerhalb des quadratischen Falls im Allgemeinen nicht gilt.

### Literatur

- [1] J.-P. Serre, *A Course in Arithmetic*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 7, Springer, 1973.
- [2] W. Scharlau, *Quadratic and Hermitian Forms*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 270, Springer, 1985.
- [3] J. Neukirch, *Algebraische Zahlentheorie*, Springer, 1992.

### Voraussetzungen

Benötigt werden Kenntnisse der *Linearen Algebra* und der *elementaren Zahlentheorie*. Vorkenntnisse aus der Vorlesung *Algebra* sind hilfreich, aber nicht notwendig.

## **Zeit und Ort**

Das Seminar findet wöchentlich im Sommersemester 2026 statt. Der erste Termin ist der 16.04.2026, 16-18 Uhr.

Ort: Robert-Mayer-Str. 10, Raum 901

## **Vorbesprechung**

*Mittwoch, den 25.03.26, 14 Uhr  
Raum 308, Robert-Mayer-Str. 6-8*

## **Organisatorisches**

Die Vorträge werden von den Teilnehmerinnen und Teilnehmern vorbereitet und im Seminar gehalten. Regelmäßige aktive Teilnahme an den Sitzungen wird erwartet.