Numerik partieller Differentialgleichungen
Sommersemester 2026
Prof. Dr. Bastian von Harrach-Sammet
M. Sc. Andrej Brojatsch

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Präsenzblatt (erschienen am 15.04.2026)

Aufgabe 0.1 (Votieraufgabe)
Zu $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ und einer Nullfolge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ definieren wir

$$\varphi_n := \varphi(x + h_n) \quad \text{und} \quad \psi_n := \frac{\varphi_n - \varphi}{h_n}.$$

Zeigen Sie, dass $\varphi_n \to \varphi$ und $\psi_n \to \varphi'$ (in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$).

Aufgabe 0.2 (Votieraufgabe)
Betrachten Sie die Funktionen $\rho_\epsilon(x) := \epsilon^{-n}\rho(x/\epsilon)$ definiert in Beispiel 2.2 der Vorlesung. Gibt es ein $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, sodass die Folge $(\rho_\epsilon)_{\epsilon\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ gegen φ konvergiert? Begründen Sie ihre Antwort!

Aufgabe 0.3 (Votieraufgabe)
Stetige lineare Funktionale $f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ heißen *Distributionen*. Die Menge aller Distributionen bezeichnen wir mit $\mathcal{D}'(\Omega)$. Für die Anwendung von f auf eine Testfunktion φ schreiben wir $f(\varphi)$ oder $\langle f, \varphi \rangle$.

Sie dürfen ohne Beweis die folgende Aussage verwenden: ein lineares Funktional $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig auf $\mathcal{D}$, falls es folgenstetig ist, also

$$\langle f, \varphi_k \rangle \to \langle f, \varphi \rangle \text{ (in } \mathbb{R}) \quad \text{für alle } (\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D} \text{ mit } \varphi_k \to \varphi \text{ (in } \mathcal{D}).$$

Wir definieren die folgenden Funktionale $T_i :\ \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, 6$, durch:

$$\begin{aligned}
T_1(\varphi) &:= \sum_{j=0}^{k} D^j \varphi(0) \qquad & T_2(\varphi) &:= \sum_{j=0}^{\infty} D^j \varphi(0) \\
T_3(\varphi) &:= \sum_{j=0}^{\infty} \varphi(j) \qquad & T_4(\varphi) &:= \max_{x\in\mathbb{R}} \varphi(x) \\
T_5(\varphi) &:= \int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x \qquad & T_6(\varphi) &:= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Welches dieser Funktionale definiert eine Distribution?

Aufgabe 0.4 (Votieraufgabe)
Wir betrachten das Randwertproblem

$$-(k(x)u'(x))' = f(x), \quad x \in (-1, 1), \quad u(-1) = 0 = u(1), \tag{1}$$

wobei $k(x) > 0$ für alle $x \in [-1, 1]$. Wir diskretisieren auf einem äquidistanten Gitter $x_i = ih$ mit $h = \frac{2}{N+1}$ für $i = 1, ..., N$ mit Zwischenpunkten $x_{i+1/2} = -1 + (i + 1/2)h$ die linke Seite der Gleichung

$$-(k(x)u'(x))' \qquad \text{durch} \qquad -\left[k(x_{i+1/2}) \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h^2} - k(x_{i-1/2}) \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{h^2} \right]. \tag{2}$$

(a) Stellen Sie mittels (2) die Diskretisierungsmatrix L_h zu (1) auf.

(b) Sei $f(x) := 1$. Lösen Sie das resultierende lineare Gleichungssystem unter Beachtung der Randbedingungen $u(-1) = 0 = u(1)$ für $k_1 \equiv 1$ und für

$$k_2(x) := 1 \quad \text{für } x \in (-1, 0), \qquad k(x) := 2 \quad \text{für } x \in (0, 1).$$

Testen Sie ihr Programm für verschiedene N und vergleichen Sie ihr Ergebnis mit der klassischen Lösung $u(x) = -0.5x^2 + 0.5$ für k_1 und der schwachen Lösung aus Bemerkung 1.1 der Vorlesung für k_2.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **Votieraufgaben** wird keine Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.