1. Übungsblatt (erschienen am 17.04.2026)

Aufgabe 1.1 (Votieraufgabe)

Beweisen Sie die Aussage von Satz 2.17 (Rechenregeln für die Ableitung) der Vorlesung.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis die Leibnitz-Formel

$$D^\alpha(\psi\varphi) = \sum_{\beta\leq\alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} D^{\alpha-\beta}\psi D^\beta\varphi$$

für $\psi, \varphi \in \mathcal{D}$ verwenden.

Aufgabe 1.2 (Schriftliche Aufgabe)[4+2 Punkte]

(a) Sei $]a, b[\subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres offenes Intervall und $f \in \mathcal{D}'(]a, b[)$ eine Distribution mit $f' = 0$. Zeigen Sie, dass dann f konstant ist, d.h. es existiert ein $c \in \mathbb{R}$, so dass f die reguläre Distribution $f(x) = c$ ist.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass

$$\langle f, \varphi\rangle = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(]a, b[) \text{ mit } \int_{-a}^{b} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

und verwenden Sie dann eine Funktion

$$\psi \in \mathcal{D}(]a, b[) \quad \text{mit } \int_{a}^{b} \psi(x)\,\mathrm{d}x = 1,$$

um die Behauptung zu zeigen.

(b) Beweisen Sie nun die Aussage von Satz 2.13 der Vorlesung:
Ist $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ mit $\partial_i f = 0$ für alle $i = 1, \dots, n$, dann ist f lokal konstant, d.h. die Distribution f wird durch einen Funktion erzeugt, bei der für jeden Punkt $x \in \Omega$ eine Umgebung existiert, auf der die Funktion konstant ist.

Aufgabe 1.3 (Programmieraufgabe)[3+2 Punkte]

In dieser Aufgabe geht es um das Erstellen und die Visualisieren einer Triangulierung eines Gebietes.

(a) Betrachten Sie ein beliebiges Rechteck $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$. Schreiben Sie eine `MATLAB`-Funktion

```
[P,T] = gen_mesh(a,b,c,d,m,n)
```

welche zu einem Rechteck, gegeben durch $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, sowie $m, n \in \mathbb{N}$ eine Triangulierung des Rechteckes in $2nm$ viele, gleichgroße Dreiecke erzeugt, vergleiche Abbildung 1 für ein Beispiel. Dabei soll die Ausgabe $P \in \mathbb{R}^{(n+1)(m+1),2}$ eine Matrix sein, welche in der i-ten Zeile die (x, y)-Koordinaten des i-ten Gitterpunktes enthält. $T \in \mathbb{R}^{2mn,3}$ soll eine Matrix sein, welche in der j-ten Zeile die Indizes der drei, zum j-ten Dreieck gehörenden, Gitterpunkte enthält. Testen Sie ihre Funktion für verschiedene Rechtecke.

Abbildung 1: Beispielhafte Triangulierungen des Rechteckes $[0, 2] \times [0, 1]$ für $n = 4$ und $m = 2$ und $[0, 1.5] \times [0, 1.5]$ für $n = m = 3$.

(b) Schreiben Sie eine `MATLAB`-Funktion

`plot_mesh(P,T)`

welche zu einer durch P und T gegebenen Triangulierung (vergleiche Teilaufgabe (a)) das zugehörige Gitter zeichnet. Testen Sie ihre Funktion mit dem Ergebnis aus Teilaufgabe (a). Testen Sie ihre Funktion außerdem mit dem Gitter, welches in der Datei `grid.mat` (siehe Homepage) enthalten ist.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben*** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 30.04.2026 um 12:00 Uhr in Fach 17 im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist. Die jeweilige Fachnummer entnehmen Sie der Homepage.

- Zu **Programmieraufgaben*** ist bis zum 30.04.2026 um 12:00 Uhr ein **kommentierter** `MATLAB`-Quellcode zu schreiben, welcher zusammen mit den damit erstellten Plots ausgedruckt und in in Fach 17 eingeworfen werden soll. Der Code ist nicht per Mail einzureichen.

- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.

* **Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.**