Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2026
22. April 2026

Vorlesung
Martin Möller
Miguel Prado

Vorlesung

Riemannsche Flächen II

Sommersemester 2026

Ziel der Vorlesung ist etwas über Räume zu verstehen, die Riemannsche Flächen, flache Flächen und abelsche Varietäten parametrisieren, sogenannte Modulräume.

Die Vorlesung setzt Grundkenntnisse zu Riemannschen Flächen voraus, aber keine Vorlesung zu algebraischer Geometrie. Sie ist ggf. als Ergänzung hierzu gedacht. Dementsprechend nehmen wir, wie die Hauptquelle [BL04] den naiven Standpunkt von Modulräumen ein, der nur Bijektionen von komplexen Punkten verlangt. Alle Aspekte von (grober) Darstellbarkeit von Modulfunktoren werden ausgeklammert.

Die Vorlesung geht den Weg zur Konstruktion dieser Modulräume 'von hinten' und startet mit einer Einführung in abelsche Varietäten. Dabei werden wir an dieser wichtigen klassen höherdimensionaler komplexer Varietäten die Konzepte von Geradenbündeln (wieder)finden. Wichtigstes Zwischenziel ist das Konzept einer Polarisierung auf einem komplexen Torus.

In einem zweiten Schritt kommen wir dann nochmal auf das Konzept der Jakobischen zurück, um so aus dem Modulraum von abelschen Varietäten den Modulraum von Kurven zu bauen.

1. **Komplexe Tori** (15.04.26)

   Komplexe Tori, Periodenmatrix, Homomorphismen zwischen Tori. Isogenien. [BL04, Abschnitt 1.1 und 1.2]

2. **Singuläre Kohomologie komplexer Tori** (20.04.26)

   Isogenie sein ist eine Äquivalenzrelation [BL04, Cor. 1.2.7]

   Crash-Kurs Tensorprodukt, Tensoralgebra, äußere Algebra (Quelle: jedes Buch über kommutative Algebra).

   Kohomologie komplexer Tori (nur [BL04, Lemma 1.3.1 und Cor. 1.3.2])

3. **Chernklasse von Geradenbündeln als alternierende Form** (22.04.26)

   Isomorphieklassen von Geradenbündeln sind durch $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ gegeben.

   Erste Chernklasse von Geradenbündeln auf abelschen Varietäten via Exponentialsequenz [BL04, Abschnitt 2.1].

Darstellung der ersten Chernklasse durch alternierende Formen [BL04, Theorem 2.1.2]. Beschreibung des Bildes durch Integralitätsbedingung [BL04, Proposition 2.1.6] und Umformulierung in Hermitesche Formen [BL04, Lemma 2.1.7]. Positive Geradenbündeln (nur Definition und vage Motivation). Hodge-Zerlegung als Black Blox verwendet.

Duale komplexe Tori [BL04, Abschnitt 2.3] abstrakt, ohne Pic_0-Interpretation.

4. **Geradenbündel und Automorphiefaktoren** (27.04.26)

   Einführung in Gruppenkohomologie und Beschreibung von Geradenbündeln via Automorphiefaktoren [BL04, Anhang B.1]. TBC

Literatur

[BL04] Christina Birkenhake und Herbert Lange. *Complex abelian varieties*. 2nd augmented ed. Bd. 302. Grundlehren Math. Wiss. Berlin: Springer, 2004.