

Geometrische Ungleichungen (2+1)

im WS 2026/27

Dozent: Prof. Dr. Andreas Bernig
e-mail bernig@math.uni-frankfurt.de
Raum 821
Robert-Mayer-Strasse 10
Sekretariat Frau Habash, Raum 802

Webseite der Vorlesung: <http://www.uni-frankfurt.de/fb/fb12/mathematik/an/bernig/index.html>

Diese Vorlesung gehört zum Modul *Differentialgeometrie* (BaM-DG-k) und wird mit 5 CPs bewertet.

Vorlesungszeiten: Do 10-12, Hörsaal H1

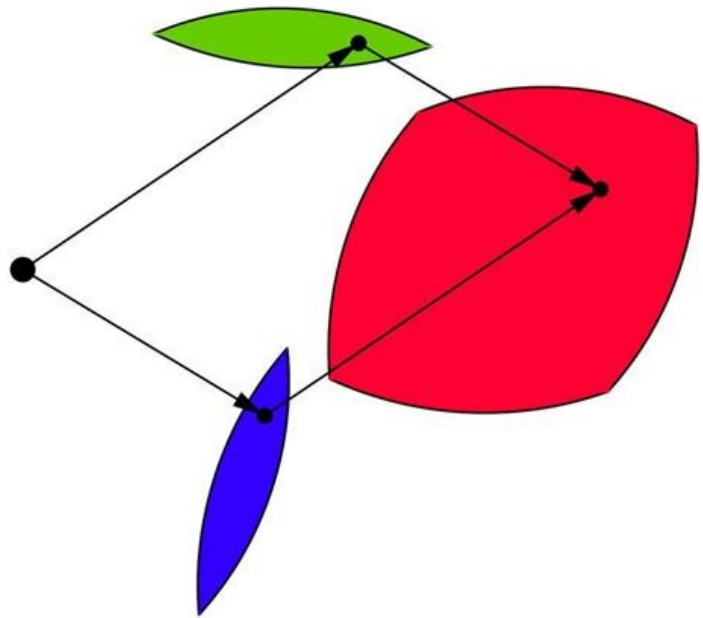
Vorkenntnisse: Höhere Analysis, Grundkenntnisse in Geometrie. Beim Beweis der Alexandrov-Fenchel Ungleichung werden ein paar grundlegende Ergebnisse der Funktionalanalysis verwendet.

Inhalt

Die Brunn-Minkowski Theorie untersucht das Zusammenspiel zwischen dem Volumen (Lebesguemaß) und der punktwisen Addition (Minkowskissumme) von konvexen Mengen. Die Brunn-Minkowski Ungleichung ist eine relativ einfach zu beweisende, aber fundamentale Ungleichung, die die bekannte isoperimetrische Ungleichung impliziert. Eine funktionale Version der Brunn-Minkowski Ungleichung ist die Prékopa-Leindler Ungleichung. Beweise dieser und weiterer geometrischer Ungleichungen können mittels Steiner Symmetrisierung geführt werden.

Eine weitreichende Verallgemeinerung und ein Höhepunkt der Theorie ist die Alexandrov-Fenchel Ungleichung 1937. Es existieren zahlreiche Beweise dieser Ungleichung, die Querverbindungen zu anderen mathematischen Gebieten wie Algebraische Geometrie (Hodge Index Theorem), Kombinatorik (Polytoptheorie) und Funktionalanalysis (Spektralmethode) aufzeigen. Keiner dieser Beweise ist ganz einfach, wir werden einem funktionalanalytischen Zugang von Shenfeld und van Handel 2019 folgen. Die Alexandrov-Fenchel Ungleichung ist trotz ihres hohen Alters ein hochaktuelles Forschungsgebiet. Die Gleichheitsfälle sind nicht vollständig bekannt, auch wenn es 2023 durch Shenfeld-van Handel spektakuläre Fortschritt in dieser Frage gab. Die 2024 von Bernig-Kotrbatý-Wannerer bewiesenen Hodge-Riemann Relationen bilden eine weitreichende Verallgemeinerung der Alexandrov-Fenchel Ungleichung.

Wir werden in der Vorlesung weitere wichtige affin-invariante Ungleichungen wie die Blaschke-Santaló Ungleichung, die Rogers-Shephard Ungleichung sowie die im Juli 2026 von Kotrbatý und Mouamine bewiesene Godbersen Vermutung behandeln.



Themen

- Brunn-Minkowski-Ungleichung
- Prékopa-Leindler Ungleichung
- Steiner Symmetrisierung
- Gemischte Volumina
- Alexandrov-Fenchel Ungleichung
- Rogers-Shephard Ungleichung und Godbersen Vermutung
- Blaschke-Santaló Ungleichung

Tutorium: Es wird ein Tutorium geben, welches von Herrn Giacomo Di Paolo <dipaolo@math.uni-frankfurt.de>, Raum 818 geleitet wird. Das Tutorium beginnt in der dritten Semesterwoche und findet alle zwei Wochen statt. Die Termine der Tutorien werden auf OLAT bekanntgegeben.

Übungsblätter werden jeweils spätestens freitags auf OLAT (siehe unten) bereitgestellt. Die Lösungen der Übungsblätter müssen bis zum Ende der darauf folgenden Woche als PDF-Dateien auf OLAT hochgeladen werden.

Die Termine für die mündliche Prüfung werden im Verlauf des Semesters festgelegt.

OLAT: Informationen zur Vorlesung, insbesondere das Skript, einen Link zu den Aufzeichnungen sowie die Übungsblätter werden auf der Internet-Lernplattform OLAT <https://olat.server.uni-frankfurt.de/olat/dmz/> bereitgestellt. Zur Anmeldung ist ein Account des Hochschulrechenzentrums nötig.

Literatur: Folgende Bücher werden für die Vorlesung empfohlen.

1. Rolf Schneider: Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory.
2. Peter Gruber: Convex and Discrete Geometry.
3. Richard J. Gardner: Geometric tomography.
4. Yu. D. Burago, V.A. Zalgaller: Geometric inequalities

Quelle der Bilder: Wikipedia