Modulräume irregulär gefaserter Flächen

Zur Erlangung des akademischen
Grades eines

DOKTORS DER
NATURWISSENSCHAFTEN

von der Fakultät für Mathematik der
Universität Karlsruhe
genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.-Math. Martin Möller
aus Tübingen

Tag der mündlichen Prüfung: 17.07.2002
Referent: Prof. Dr. Frank Herrlich
Korreferent: Prof. Dr. Wolfgang K. Seiler

Einleitung

Riemann konnte schon im 19. Jahrhundert an seinen Fingern abzählen, dass der Modulraum für Kurven (oder gleichbedeutend: Riemannsche Flächen) vom Geschlecht g zusammenhängend und $3g-3$-dimensional ist ([Bra01]). Als Gieseker 1977 die Existenz des Modulraums für Flächen vom allgemeinen Typ bewies, wusste er, dass seine Finger niemals ausreichen würden, die Komponenten dieses Modulraums zu zählen. Während das Wissen über Flächen von Kodaira-Dimension $-\infty$ und Null befriedigend ist und Seiler ([Sei82] und [Sei87]) Modulräume für elliptische Faserungen konstruiert und eingehend untersucht hat, ist für Flächen vom allgemeinen Typ das Wissen (während diese Zeilen entstehen) sehr bruchstückhaft. Etwas genauer ist das Bild, wenn man sich auf gefaserte Flächen vom allgemeinen Typ beschränkt. Und die (allzu naive) Hoffnung, man müsse nur den richtigen 'Klebstoff' finden, um aus den Modulräumen für Faser und Basis die entsprechenden Komponenten des Modulraums für gefaserte Flächen zu erhalten, war durchaus eine Motivation dafür, diese zu untersuchen.

Einen guten Überblick über Struktur und Komponenten des Modulraums für regulär gefaserte Flächen vom Fasergeschlecht 2 hat man dank der Arbeiten von Horikawa ([Ho75], [Ho77]), Xiao ([Xi85]) und Seiler([Sei95]). Diese leben von dem „Zufall“, dass solche Flächen zweiblättrige Überlagerungen von Regelflächen sind. Bei irregulären Faserungen, die im Mittelpunkt dieser Arbeit stehen, ist dies nicht länger der Fall. Die Strukturaussagen stammen dann aus anderen glücklichen Umständen, die auftreten, wenn man sich auf isotriviale Flächen (Kapitel 3) oder Flächen mit besonders hoher Irregularität (Kapitel 4) einschränkt.

Zu den Inhalten der einzelnen Kapitel:
Untersucht man nicht nur die minimalen Modelle der gefaserten Flächen, sondern interessiert man sich für Familien derselben, so tritt die Frage auf, ob es die Faserung auch in Familien gibt. Bei regulären Faserungen erle-

digt dies die Albanese-Abbildung quasi automatisch. Es überrascht nicht, dass dies bei irregulären Faserungen auch so ist, sofern die Faserung einer gewissen Eindeutigkeitsbedingung genügt. Dieses sehr technische Resultat ist Gegenstand von Kapitel 2. Zum Glück gibt es ein sehr handliches Kriterium (Satz 2.3.1) hierfür.

Die Kapitel 3 und 4 bauen auf dieses Existenzresultat, sind aber ansonsten logisch voneinander unabhängig.
Die Hoffnung auf einen Klebstoff ist bei gefaserten Flächen, deren glatte Fasern paarweise isomorph sind, eher begründet. Dies führt zu dem Begriff der isotrivialen Faserung. Von Serrano ([Ser96]) stammt die Beschreibung solcher Flächen als Produkt von Kurven modulo der Aktion einer Monodromiegruppe. Der Begriff 'isotrivial' ist jedoch leider nicht deformationsinvariant. Schlimmer noch: Sind das Fasergeschlecht und das Basisgeschlecht der Faserung größer gleich 2, so ist zwar die Mächtigkeit der Monodromiegruppe bei zwei isotrivialen Flächen in einer Zusammenhangskomponente des Modulraums gleich, nicht aber deren Struktur. Dies wird in Satz 3.2.3 mit Hilfe abelscher Überlagerungen gezeigt.
Für den einfachsten Spezialfall, nämlich den der Monodromiegruppe $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, kann man ebenfalls mit Hilfe von Deformationen abelscher Überlagerungen die Komponenten des Modulraums bestimmen, in denen solche isotrivialen Flächen vorkommen. Theorem 3.2.9 besagt, dass diese durch 4 ganze Zahlen parametrisiert werden, nämlich zwei Kurvengeschlechter und zwei Grade von invertierbaren Garben auf gewissen Kurven.
Sind diese Grade groß genug, erhält man daraus auch unmittelbar die Dimension der entsprechenden Komponenten. Für kleine Grade bleiben die Resultate trotz der Maschine „Deformationstheorie" bescheiden (siehe Abschnitt 3.2).
Deformationstheoretisch wesentlich geeigneter ist der Begriff der produktisogenen Fläche, bei dem zusätzliche Einschränkungen an die Aktion der Monodromiegruppe gemacht werden. Unter schwachen Voraussetzungen an Faser- und Basisgeschlecht erzählt Theorem 3.3.3 'alles' über solche Komponenten des Modulraums. Vermutlich kannte Catanese ([Cat00], [Cat01]) so ein Ergebnis. Er notiert es aber in dieser Form nicht, da er produktisogene Flächen nur in der absoluten Situation betrachtet. Önsiper ([Oen00]) behandelt die Modulräume, aber nur den Spezialfall von Faserbündeln, und er muss stärkere Einschränkungen an die Fasergeschlechter machen.

Die Schlichtheit dieses Ergebnisses, das in obige Moral 'zwei Kurven plus Zusatzstruktur' passt, war Anlass dafür, dies in voller Allgemeinheit zusammenzufassen.

Ist die Irregularität der Faserung maximal, so kann man den Modulraum ebenfalls – wie oben naiv erhofft – beschreiben. Anstelle der zweiten Kurve tritt jedoch ein abelsches Schema und der gesuchte Klebstoff ist ein Morphismus auf eine feste Kurve. Kernstück dieser Beschreibung der Moduläume ist die Konstruktion eines 'Prototypen' für solche Flächen. Xiao hat so etwas im Falle des Fasergeschlechts $g = 2$ erreicht (Theorem 4.2.2). Seine Konstruktion von Modulräumen für abelsche Varietäten mit festem Morphismus lässt sich auf höhere Dimensionen (Theorem 4.1.9) verallgemeinern. Um daraus einen Prototypen für höhere Fasergeschlechter zu basteln, muss man Konsequenzen des Satzes von Torelli analysieren. Dies leistet im Falle von $g = 3$ das Theorem 4.2.3. Es bestimmt gleichzeitig Fasern und Invarianten dieser Flächen (siehe Satz 4.2.12 und Korollar hierzu). Theorem 4.3.3 enthält schließlich die angekündigte Beschreibung des Modulraums mittels abelscher Varietäten und eines Hurwitz-Schemas.

Diese Arbeit liefert keinesfalls 'abschließende' oder 'vollständige' Resultate für die Geometrie von Modulräumen im Spezialfall von gefaserten Flächen. Es sind vielmehr Steinchen in einem Mosaik, das auf Vervollständigung wartet. Insbesondere verallgemeinert sich Theorem 4.2.3 automatisch auf höhere g, wenn man den entsprechenden Spezialfall des Schottky-Problems analysiert hat.

Noch eine kurze Gebrauchsanweisung: Die wesentlichen Definitionen und Bezeichnungen sind im Abschnitt 1.2 für Flächen allgemein und in Abschnitt 2.1 für gefaserte Flächen zu finden. Ansonsten enthält Kapitel 1 nichts wirklich Neues, obwohl der Autor für die Sätze im Abschnitt 1.3.2 keine zitierfähige Quelle kennt.
Anhang A.1 beweist einen Satz der Deformationstheorie, der nur an einer, allerdings wesentlichen Stelle in Abschnitt 2.2 verwendet wird. Der Beweis dazu ist in der Literatur verstreut, der Abschnitt ist also aus dem Wunsch entstanden, den Weg dahin einmal geschlossen darzulegen.
Anhang A.2 wiederholt die - noch nicht standardisierten - Bezeichnungen der Deformationstheorie abelscher Überlagerungen. Diese werden ausschließlich in Abschnitt 3.2 verwendet.

Diese Arbeit verwendet $\mathbb{C}$ als Grundkörper, hauptsächlich um den Begriff 'Monodromie' verwenden zu können. Die Resultate lassen sich aber vermutlich auf alle algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik Null ausdehnen.

Mein Dank gilt in erster Linie Frank Herrlich, der mein Interesse – über einige Umwege – auf Modulräume für Flächen gelenkt hat, und dessen stets offene Bürotür Zeichen für eine fast unermüdliche Diskussionsbereitschaft ist. Weiterhin danke ich allen, die ich mit Fragen löchern durfte. Dies sind 'Stackminister' Volker Braungardt, Markus Even (und seine stabilen Abbildungen), Stefan Kühnlein (der alle Untergruppen der $SL_2(\mathbb{Z})$ persönlich kennt), Wolfgang Seiler (der zudem kurzfristig bereit war, dies alles zu begutachten) und Eckart Viehweg (der mir erklärt hat, wie Torelli wirklich funktioniert).

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Flächen vom allgemeinen Typ und ihre Albanese-Varietät

1.1 Kanonische und minimale Modelle von Flächen vom allgemeinen Typ

1.1.1 Kontraktionen von Flächen, Singularitäten

Beginnen wir mit einigen grundsätzlichen Definitionen:

Definition 1.1.1. *Eine* (algebraische) Fläche X *ist ein integres, normales, zweidimensionales Schema vom endlichen Typ über* $\mathbb{C}$.

Definition 1.1.2. *Ein eigentlicher, surjektiver, birationaler Morphismus* $\pi : X \to \overline{X}$ *zwischen zwei Flächen heißt* Kontraktion, *die zu Punkten kontrahierten Kurven* exzeptionell. $C \subset X$ *heißt* kontrahierbar, *wenn es eine Kontraktion gibt, für die* C *exzeptionell ist.*

Dieser Abschnitt fasst zusammen, unter welchen Bedingungen an die exzeptionellen Kurven es so eine Kontraktion gibt, welche Singularitäten das Bild hat und was mit den numerischen Invarianten $q(X) = \dim H^1(X, \mathcal{O}_X)$, $p_g(X) = \dim H^2(X, \mathcal{O}_X)$, $\chi(\mathcal{O}_X)$, K_X^2, $c_2(X)$ einer glatten Fläche bei solchen Kontraktionen geschieht. Dazu benötigen wir einen Ersatz für den kanonischen Divisor auf nicht notwendig glatten Flächen. Folgende Definitionen der dualisierenden Garbe unter sehr schwachen Voraussetzungen werden bei den in dieser Arbeit auftretenden Flächen allesamt äquivalent sein.

Definition und Satz 1.1.3. *Ist der Morphismus von* $\mathbb{C}$*-Schemata* $f : X \to T$ *flach und Cohen-Macaulay, so gibt es eine* dualisierende Garbe $\omega_{X/T}$ *zusammen mit einer Spurabbildung, die einer Grothendieck-Dualität genügt.* $\omega_{X/T}$ *ist flach über* T *und vertauscht mit Basiswechsel.*
Ist $T = \operatorname{Spec} \mathbb{C}$ *ein Punkt, so schreibt man kurz* ω_X*. Ist* X *zudem normal und reduziert, so ist*

$$\omega_X = K_X := (\wedge^{\dim(X)} \Omega^1_X)^{\vee\vee}.$$

T *heißt* Gorenstein, *falls* ω_T *invertierbar ist. Ist dies zusätzlich zu allen obigen Bedingungen erfüllt, so ist* $\omega_{X/T} = \omega_X \otimes f^* \omega_T^{-1}$*.*

Die genaue Definition, die wir hier nicht benötigen, und den Beweis findet man in [Con00].

Satz 1.1.4. *(Mumford, Artin, Grauert, [Ar62]) Ist* $C \subset X$ *kontrahierbar, so ist die Schnittmatrix von* C *negativ definit. Ist* X *glatt oder hat jeder effektive Zykel mit Träger auf* C *nichtpositives arithmetisches Geschlecht, so ist dies auch hinreichend.*
Es ist $\chi(\mathcal{O}_X) - \chi(\mathcal{O}_{\overline{X}}) \geq g(Z)$ *für jeden effektiven Zykel* Z *mit Träger auf* C*.*

Bemerkung 1.1.5. Ist X glatt und π die Kontraktion einer (-1)–Kurve E, d.h. einer glatten, rationalen Kurve mit Selbstschnitt -1, so ist $\overline{X}$ glatt (Castelnuovo) und es gilt $K_X = \pi^* K_{\overline{X}} + E$. Es sind bekanntlich q, p_g und damit $\chi(\mathcal{O}_X)$ birationale Invarianten, solange man bei glatten Flächen bleibt. Daher ist

$$K_{\overline{X}}^2 = K_X^2 + 1, \qquad c_2(\overline{X}) = c_2(X) - 1.$$

Satz 1.1.6. *([Ar62]) Im Falle einer glatten Fläche* X *sind äquivalent:*
i) C *ist derart kontrahierbar, dass* $K_{\overline{X}}$ *lokal Hauptdivisor ist und* $\pi^* K_{\overline{X}} = K_X$ *gilt.*
ii) Die Schnittmatrix von C *ist negativ definit und jede Komponente ist eine* (-2)*-Kurve (d.h. glatt, rational und mit Selbstschnitt* (-2)*).*
In diesem Fall ist $\chi(\mathcal{O}_X) = \chi(\mathcal{O}_{\overline{X}})$*.*

Diese Kurven heißen auch A-D-E-Kurven (in [BPV84]), die möglichen Schnittformen werden durch die Dynkin-Diagramme A_n, D_n, E_6, E_7 und E_8 bestimmt.

Definition 1.1.7. *Die Singularitäten von $\overline{X}$ heißen* rational*, falls es eine glatte Fläche X und ein Kontraktion $\pi : X \to \overline{X}$ gibt, sodass $R^1\pi_*\mathcal{O}_X$ verschwindet.*
Singularitäten, die durch Kontraktion einer A-D-E-Kurve auf einer glatten Fläche entstehen, heißen rationale Doppelpunkte.
Singularitäten, die durch Kontraktion von $C = \cup C_i$ enstehen, wobei

$$C_i^2 \leq -2, \quad C_i \cdot C_{i+1} = 1, \quad C_i \cdot C_j = 0 \, für |i-j| \geq 2$$

gilt, heißen Hirzebruch-Jung-Singularitäten. *C wird dann* Hirzebruch-Jung-Kette *(*H-J-Kette*) genannt.*

Bemerkung 1.1.8. Wie durch die Bezeichnung suggeriert, sind rationale Doppelpunkte rationale Singularitäten (siehe [BPV84] Prop. III.3.3).
Eine (normale) Fläche mit nur rationalen Singularitäten ist Cohen-Macaulay und, falls sie nur rationale Doppelpunkte enthält, auch Gorenstein.

Korollar 1.1.9. *Ist X glatt und $X \to \overline{X}$ eine Kontraktion von A-D-E-Kurven, so ist $c_2(X) = c_2(\overline{X})$, $q(X) = q(\overline{X})$ und $p_g(X) = p_g(\overline{X})$.*

Beweis: Die Aussage über c_2 ist direkte Konsequenz aus obigem Satz und der Noetherformel. Die restlichen Aussagen folgen aus der Spektralsequenz $H^i(\overline{X}, R^j\pi_*\mathcal{O}_X) \Rightarrow H^{i+j}(X, \mathcal{O}_X)$ und der definierenden Eigenschaft der rationalen Singularität. □

Satz 1.1.10. *Eine zweiblättrige Überlagerung einer glatten Fläche hat genau dann nur rationale Doppelpunkte, wenn der Verzweigungslokus eine Kurve mit nur A-D-E-Singularitäten ist ([BPV84] Th. 7.3). Zur Defintion dieser Singularitäten siehe [BPV84] Absch. II.8.*
Eine zyklische Überlagerung einer glatten Fläche, deren Verzweigungsdivisor als Singularitäten höchstens Knoten besitzt, hat nur rationale Doppelpunkte, genauer nur A_n-Singularitäten ([BPV84] Th. 5.2).
Quotienten einer glatten Fläche nach einer zyklischen Gruppen haben nur Hirzebruch-Jung-Singularitäten ([BPV84] Absch. III.5.iii).

1.1.2 Flächen vom allgemeinen Typ

Definition 1.1.11. *Der* kanonische Ring *eines Fläche S ist der graduierte Ring*

$$\oplus_{i \geq 0} \Gamma(S, K_S^{\otimes i}).$$

Sein Transzendenzgrad heißt Kodaira-Dimension *von X. Eine glatte Fläche der Kodaira-Dimension* 2 *heißt* Fläche vom allgemeinen Typ.

Da der kanonische Ring einer Fläche endlich erzeugt ist (siehe dazu [BPV84] Abschn. I.7), definiert man weiterhin:

Definition 1.1.12. *Das n-*kanonische Modell *X einer Fläche S vom allgemeinen Typ ist definiert als*

$$X_n = \mathrm{Proj}(\oplus_{i\geq 0}\Gamma(S, K_S^{\otimes ni})).$$

Für eine solche Fläche S ist die n-kanonische Abbildung k_n für $n \geq 5$ bekanntlich ein birationaler Morphismus auf ihr Bild. k_n kontrahiert genau die (-2)–Kurven auf S.

Bezeichnung 1.1.13. *Wir nennen ein n-kanonisches Modell einer Fläche vom allgemeinen Typ für $n \geq 5$ kurz* kanonisches Modell *und lassen den Begriff 'vom allgemeinen Typ' auch für solche Modelle zu, obwohl sie im Allgemeinen nicht glatt sind:*

Satz 1.1.14. *Sei X das kanonische Modell einer Fläche S vom allgemeinen Typ. Dann ist K_X (vgl. Def. 1.1.3) ampel. Das kanonische Modell X hat höchstens A-D-E-Singularitäten und es gilt*

$$K_X^2 = K_S^2, q(X) = q(S), p_g(X) = p_g(S).$$

Beweis: Siehe z.B. [BPV84] Kapitel VII, insbesondere Prop. VII.7.1. Die Identitäten der Invarianten wurden im vorherigen Abschnitt gezeigt. □

1.2 Modulräume für Kurven und Flächen: Bezeichnungen

Bevor man Modulräume für Flächen betrachtet, muss man Modulräume für Kurven gesehen haben. Wir halten hier nur die Bezeichnungen fest. Vieles mehr, insbesondere die Defintion stabiler und semistabiler Kurven, findet man in [HM98] oder in [DM69].

Bezeichnung 1.2.1. *Sei $\mathfrak{C}_g(T)$ die Menge der Isomorphieklassen glatter, eigentlicher Familien von Kurven vom Geschlecht g über T und M_g der*

Modulraum, der diesen Funktor grob darstellt.
Weiter sei $\mathfrak{C}^s(T)$ die Menge der Isomorphieklassen flacher, eigentlicher Familien stabiler Kurven vom Geschlecht g über T und $\overline{M_g}$ der Modulraum, der diesen Funktor grob darstellt.

Definition 1.2.2. *Der Modulfunktor $\mathfrak{S} : (Sch)/\mathbb{C} \to (Set)$ ordnet einem Schema $T/\mathbb{C}$ die Isomorphieklassen flacher, projektiver Morphismen $f : X \to T$ zu, deren Fasern kanonische Modelle von Flächen vom allgemeinen Typ sind.*
Die Elemente von $\mathfrak{S}(T)$ werden Familien *von Flächen vom allgemeinen Typ genannt.*

Gelegentlich werden auch Familien von Flächen auftreten, die nicht vom allgemeinen Typ sind. Dabei impliziert der Begriff Familie stets 'flach' und 'eigentlich'.

Bezeichnung 1.2.3. *Nach Gieseker besitzt dieser Funktor einen groben Modulraum, den wir mit N bezeichnen. Mit X bezeichnen wir kanonische Modelle von Flächen (oder Familien hiervon) und reservieren den Buchstaben S für minimale Modelle (oder Familien hiervon). Um zum Ausdruck zu bringen, dass X eine Familie ist wird der Strukturmorphismus auf eine Basis, zumeist T, hinzugeschrieben, aber kein anderer Schriftsatz verwendet.*

Wir benötigen noch eine Charakterisierung von Familien von Flächen vom allgemeinen Typ:

Satz 1.2.4. *Die Menge $\mathfrak{S}(T)$ besteht aus Isomorphieklassen flacher, projektiver Morphismen $f : X \to T$, deren Fasern integre, normale Flächen mit höchstens rationalen Doppelpunkten sind, und für die $\omega_{X/T}$ ampel ist.*

Beweis: Ist $f \in \mathfrak{S}(T)$, so ist faserweise $\omega_{X_t/k(t)}$ ampel. Dies impliziert mit Basiswechselargumenten, dass auch $\omega_{X/T}$ ampel ist (siehe z.B. [Tan72]). Umgekehrt impliziert $\omega_{X/T}$ ampel, dass eine geeignete Potenz von $\omega_{X_t/k(t)}$ eine Einbettung ist und die Fasern Kodaira-Dimension 2 haben. □

1.2.1 Gefaserte Flächen, Generalvoraussetzungen

Definition 1.2.5. *Eine* Faserung *einer Fläche X ist ein surjektiver Morphismus h auf eine glatte Kurve B mit zusammenhängenden Fasern. Wir*

nennen (X, h) *oder* $X \to B$ *auch* gefaserte Fläche.
Ein Modell einer gefaserten Fläche (X, h) *ist* relativ minimal, *falls* X *keine* (-1)*–Kurven in den Fasern von* h *enthält.*
Wir bezeichnen generell das Geschlecht der Basis der Faserung mit b *und das der Faser mit* g *und nennen dann* h *eine Faserung* vom Typ (g, b).

Bemerkung 1.2.6. Aus einem beliebigen Morphismus einer Fläche auf eine Kurve erhält man eine Faserung durch Stein-Faktorisierung ([EGA] III, Th. 4.3.1 und Cor. 4.3.3). Da die Fläche X als normal vorausgesetzt ist, erhält man aus einem Morphismus auf eine nicht notwendig glatte Kurve ein Faserung durch Normalisierung.

Bei der Untersuchung von Modulräumen sind vor allem solche Faserungen interessant, die deformationsinvariant sind.

Satz 1.2.7. *Ist* $g \geq 2$ *bzw.* $b \geq 2$*, so ist die Eigenschaft einer Fläche eine Faserung vom Typ* (g, b) *zu besitzen, deformationsinvariant.*

Beweis: In der Tat ist die Eigenschaft, einen Morphismus auf eine Kurve vom Geschlecht ≥ 2 zu besitzen, sogar durch die Fundamentalgruppe der Fläche bestimmt, siehe [Bea91]. Das Fasergeschlecht ist, falls ≥ 2, diffeomorph invariant, siehe [Cat00] Th. 2.9 für einen Beweis mittels Seiberg-Witten-Theorie. □

Unter den Voraussetzungen des vorigen Satzes werden wir fast durchweg arbeiten. Wir kürzen sie wie folgt ab:

Bezeichnung 1.2.8. *Eine Faserung erfüllt die Faservoraussetzung (FV), falls* $g \geq 2$ *ist. Sie erfüllt die Basisvoraussetzung (BV), falls* $b \geq 2$ *ist.*

Unter (BV) stimmen zudem die Begriffe minimales und relativ minimales Modell überein, denn eine (-1)–Kurve kann sicher nicht surjektiv auf die Basis abgebildet werden. Folgendes Lemma verwenden wir häufig implizit und beweisen es kurz mangels geeigneter Referenz.

Lemma 1.2.9. *Bei Flächen vom allgemeinen Typ hat zudem das minimale Modell* S *genau dann eine Faserung, wenn das kanonische Modell* X *eine solche besitzt.*

Beweis: Zu zeigen ist, dass sich die Faserung $h : S \to B$ auch auf die Bilder der kontrahierten (-2)-Kurven fortsetzt. Dies ist eine lokales Problem. Sei $\operatorname{Spec} R$ eine affine Umgebung in X einer Singularität und $\operatorname{Spec} \tilde{R}$ das Urbild davon in S. Da nach der Generalvoraussetzung R normal ist, gilt $R = \cap_{\mathrm{ht}\mathfrak{p}=1} R_{\mathfrak{p}}$. Da die Bilder der kontrahierten Kurven Kodimension 2 haben, ist $R_{\mathfrak{p}} \cong \tilde{R}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$, wobei $\tilde{\mathfrak{p}}$ das Primideal in $\tilde{R}$ ist, das über $\mathfrak{p}$ liegt. Nach (BV) muss die kontrahierte Kurve in einer Faser liegen und h induziert eine stetige Abbildung der zugrundeliegenden topologischen Räume von X und B. Ist $\operatorname{Spec} R'$ eine affine Umgebung in B des Bildes dieser Faser, so passen die Morphismen

$$h_X^{\#} : R' \to \tilde{R}_{\tilde{\mathfrak{p}}} \cong R_{\mathfrak{p}}$$

zu dem gesuchten Morphismus $h_X : X \to B$ zusammmen. □

Unter (FV) und (BV) sei $N_{g,b}$ eine Zusammenhangskomponente des Modulraums N, sodass jede Fläche X in $N_{g,b}(\operatorname{Spec} \mathbb{C})$ eine Faserung vom Typ (g, b) besitzt. Die Untersuchung solcher Komponenten ist Hauptgegenstand dieser Arbeit. Dazu ist es notwendig, folgende ähnliche Begriff zunächst klar zu trennen.

Definition 1.2.10. *Eine* Familie gefaserter Flächen über T *ist eine Familie von Flächen $f : X \to T$, sodass für jedes $t \in T$ die Fläche X_t eine Faserung besitzt.*
Eine Familie gefaserter Flächen zu $N_{g,b}$ *hat die Zusatzeigenschaften, dass f in $\mathfrak{S}(T)$ liegt und dass das Bild unter der Modulabbildung in $N_{g,b}$ landet. Der entsprechende Unterfunktor von $\mathfrak{S}$ wird dann mit $\mathfrak{S}_{g,b}$ bezeichnet, wobei das Indexpaar im Allgemeinen die Komponente nicht eindeutig spezifiziert.*

Diese Definition impliziert nicht, dass die Faserungen h_t alle von einem Morphismus $h : X \to B$ auf eine Familie von Kurven herkommen. Wann dies der Fall ist, wird in Kapitel 2 untersucht. Für diese Situation verwenden wir einen eigenen Begriff:

Definition 1.2.11. *Eine* gefaserte Familie von Flächen über T *besteht aus einer Familie von Flächen $f : X \to T$, einer Familie von glatten Kurven $g : B \to T$ und einem T-Morphismus $h : X \to B$ mit zusammenhängenden Fasern, sodass $f = g \circ h$ ist.*

Wir nennen h dann auch Faserung der Familie f *und schreiben dafür oft einfach $X \to B \to T$.*

1.3 Abelsche Schemata, Albanese-Schema

Beginnen wir damit Grothendiecks fundamentale Ergebnisse über die Darstellbarkeit und Eigenschaften des relativen Picardfunktors zusammenzufassen. Es bezeichne $\mathrm{Pic}_{X/T}$ den relativen Picard-Funktor und $\mathrm{Pic}^0_{X/T}$ den Unterfunktor, dessen Elemente auf eine Faser t eingeschränkt in der Zusammenhangskomponente der Eins von $\mathrm{Pic}^0_{X_t/k(t)}$ liegen.

Satz 1.3.1. *Sei $f : X \to T$ flach, projektiv und mit geometrisch reduzierten Fasern. Dann ist $\mathrm{Pic}_{X/T}$ durch ein separiertes Schema $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/T}$ darstellbar. Ist X über einem Körper definiert und normal, so ist $\mathrm{Pic}^0_{X/T}$ durch ein Unterschema $\underline{\mathrm{Pic}}^0_{X/T}$ von $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/T}$ darstellbar, das projektiv über T ist.*
Ist zudem $\underline{\mathrm{Pic}}^0_{X_t/k(t)}$ glatt, also ein abelsches Schema, so ist $\underline{\mathrm{Pic}}^0_{X/T}$ eingeschränkt auf eine Umgebung von t ein abelsches Schema.

Beweis: Dies ist der Inhalt bzw. eine Spezialisierung von [Gro61] Th. 2.1, Th. 3.3 und Th. 3.5. □

Wir erinnern im Folgenden an den Begriff des Albanese-Schemas in der relativen Situation:

Definition 1.3.2. *Sei $X \to T$ ein flacher, eigentlicher Morphismus. Das Paar $(\underline{\mathrm{Alb}}_{X/T}, \alpha)$, wobei $\underline{\mathrm{Alb}}_{X/T} \to T$ ein abelsches Schema und $\alpha : X \to \underline{\mathrm{Alb}}_{X/T}$ ein Morphismus über T ist, heißt* Albanese-Schema von X/T, *falls es folgender universellen Eigenschaft genügt: Für jedes abelsche Schema $A' \to T$ und jeden Morphismus $\alpha' : X \to A'$ über T gibt es genau einen Homomorphismus abelscher Schemata $\lambda : \underline{\mathrm{Alb}}_{X/T} \to A'$, sodass $\lambda \circ \alpha$ bis auf Translation mit α' übereinstimmt.*

Für Familien von glatten Kurven $C \to T$ existiert $\underline{\mathrm{Pic}}^0_{C/T}$ nach obigem Satz. Es wird dann häufig $\underline{\mathrm{Jac}}_{C/T}$ genannt. Aufgrund seiner Selbstdualität ist $\underline{\mathrm{Jac}}_{C/T}$ auch das relative Albanese-Schema, falls $C \to T$ einen Schnitt besitzt. Dies folgt aus den selben Argumenten, wie sie weiter unten in der Flächensituation verwendet werden. Auch von singulären Kurven erhalten wir noch eine Jacobische:

Satz 1.3.3. *(Deligne, [BLR90] Th. 9.4.1) Ist $C \to T$ eine Familie von semistabilen Kurven, so existiert $\underline{\mathrm{Jac}}_{C/T}$. Es ist in diesem Fall ein semiabelsches Schema.*

Satz 1.3.4. *Sei $f : X \to T \in \mathfrak{S}(T)$ eine Familie von Flächen vom allgemeinen Typ. Dann ist $\underline{\mathrm{Pic}}^0_{X/T} \to T$ ein abelsches Schema.*
Besitzt f einen Schnitt s, so existiert das Albanese-Schema $(\underline{\mathrm{Alb}}_{X/T}, \alpha_s)$.

Beweis: Für die erste Aussage bemerkt man, dass $\underline{\mathrm{Pic}}^0_{X_t/k(t)}$ genau dann glatt ist, wenn $\dim \underline{\mathrm{Pic}}^0_{X_t/k(t)} = \dim H^1(X_t, \mathcal{O}_{X_t})$ gilt ([Gro61] Th. 3.5). Dies gilt für glatte Flächen (wegen Charakteristik Null) immer und bleibt beim Übergang zum kanonischen Modell richtig.
Unter den gegebenen Voraussetzungen existiert zunächst das duale abelsche Schema

$$\underline{\mathrm{Alb}}_{X/T} := (\underline{\mathrm{Pic}}^0_{X/T})^\vee = \underline{\mathrm{Pic}}^0_{\underline{\mathrm{Pic}}^0_{X/T}/T}.$$

Aufgrund des Schnittes kann man $\mathrm{Pic}_{X/T}(S)$ als Menge der Isomorphieklassen von Geradenbündeln auf $X \times_T S$ auffassen, die entlang des Schnittes trivial sind. Das universelle solche Bündel auf $X \times_T \underline{\mathrm{Pic}}^0_{X/T}$ induziert aufgrund der universellen Eigenschaft des Poincaré-Bündels auf $(\underline{\mathrm{Pic}}^0_{X/T})^\vee \times \underline{\mathrm{Pic}}^0_{X/T}$ einen Morphismus $\alpha_s : X \to \underline{\mathrm{Alb}}_{X/T}$, der natürlich von der Wahl von s abhängt. Die universelle Eigenschaft als Albanese-Schema folgt nun wie in der absoluten Situation (z.B. [Mil86b] Cor. 6.2). □

Wir wollen das Albanese-Schema einer gefaserten Familie von Flächen vom allgemeinen Typ $X \to B \to T$ nun genauer untersuchen. Sei A die Zusammenhangskomponente der Eins des Kerns von $\underline{\mathrm{Alb}}_{X/T} \to \underline{\mathrm{Jac}}_{B/T}$. Wie man obigem Beweis entnimmt, existieren diese Schemata auch ohne dass es einen Schnitt von $X \to T$ gibt. Sei Q der Quotient $\underline{\mathrm{Pic}}^0_{X/T}/\underline{\mathrm{Jac}}_{B/T}$. Dieser existiert bei projektiven abelschen Schemata nach [Gro60] Th. 6.1 und stimmt nach Konstruktion mit dem dualen abelschen Schema von A überein.
Über dem nichtleeren, dichten Lokus B^0, worüber $h : X \to B$ glatt ist, existiert die Jacobische $\underline{\mathrm{Jac}}_{X^0/B^0} \to B^0$ (wobei $X^0 = h^{-1}B^0$ ist). Der Albanese-Funktor angewandt auf $X^0 \to X \times_T B^0$ liefert einen Morphismus

$$p' : \underline{\mathrm{Jac}}_{X^0/B^0} \to \underline{\mathrm{Alb}}_{X \times_T B^0/B^0} = \underline{\mathrm{Alb}}_{X/T} \times_T B^0.$$

Die Gleichheit folgt dabei aus der entsprechenden Eigenschaft des Picard-Funktors. Dieser Morphismus faktorisiert nach Konstruktion über eine Surjektion

$$p : \underline{\mathrm{Jac}}_{X^0/B^0} \to A \times_T B^0$$

von abelschen Schemata über B^0.

Dual hierzu erhält man

$$q' : \underline{\mathrm{Pic}}^0_{X \times_T B^0/B^0} \to \underline{\mathrm{Jac}}_{X^0/B^0},$$

was nach der universellen Eigenschaft des Quotienten eine Injektion

$$q : Q \times_T B^0 \hookrightarrow \underline{\mathrm{Jac}}_{X^0/B^0}$$

induziert. In der absoluten Situation $T = \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}$ hat somit jede glatte Faser F von $X \to B$ einen Morphismus von $\underline{\mathrm{Jac}}_F$ auf A. Deswegen wird A auch der Fixanteil der Faserung in Jacobische genannt. Wir wollen diesen Begriff für A nur zusammen mit folgender Polarisierung verwenden:
$\underline{\mathrm{Jac}}_{X^0/B^0}$ hat natürlicherweise eine Prinzipalpolarisierung und λ sei deren Einschränkung nach $Q \times_T B^0$. Daraus erhält man eine Polarisierung auf Q wie folgt (analog zu [Mil86] Th. 20.4): Wenn $B_0 \to T$ einen Schnitt s besitzt, so definiert die Verkettung $\mathrm{pr}_A \circ \lambda \circ (\mathrm{id} \times s)$ eine Isogenie $Q \to Q^\vee = A$. Die Wahl eines anderen Schnitts resultiert bei $\lambda \circ (\mathrm{id} \times s)$ in einer Translation, die bei Verkettung mit pr_A trivial wird. Der Schnitt existiert zwar im Allgemeinen nur nach einem étalen Basiswechsel, aber die Unabhängigkeit vom Schnitt lässt diese Isogenien zu einer auf Q absteigen. Wir bezeichnen sie ebenfalls mit λ und mit $\lambda^\vee$ die duale Isogenie. Dies ist die gesuchte Polarisierung von A.

Definition 1.3.5. *Das polarisierte abelsche Schema $(A/T, \lambda^\vee)$ heißt* Fixanteil *der Faserung $X \to B \to T$, in Zeichen $A = \mathrm{FA}(\underline{\mathrm{Pic}}_{X/T})$. Der Grad von λ wird der* assoziierte Grad *genannt und mit d bezeichnet.*

Je nach Bedarf werden wir die Polarisierung als Isogenie zwischen einer abelschen Varietät und ihrem Dual, als eine ample invertierbare Garbe oder als eine alternierende Bilinearform auf dem zugrundeliegenden Gitter ansehen.

Bemerkung 1.3.6. In obiger Definition 1.3.5 wurde der assoziierte Grad nur für den Morphismus der relativen Jacobischen auf den Fixanteil definiert. Es ist naheliegend diesen Begriff auf jeden surjektiven Morphismus $J \to A$ zwischen abelschen Varietäten, wovon J prinzipalpolarisiert ist, auszudehnen. J heißt dann *vom Typ* (A, d).

Bemerkung 1.3.7. Schränken wir uns auf eine Komponente $N_{b,g}$ des Modulraums ein, sodass jede Familie von Flächen zu $N_{b,g}$ eine gefaserte Familie ist. Dann ist der assoziierte Grad als Ordnung eines endlichen Gruppenschemas deformationsinvariant. Davon werden wir in den folgenden Kapiteln ständig Gebrauch machen.
Xiao definiert in [Xi92] als 'associated degree' den generischen Grad der Abbildung $\alpha : X \to \underline{\mathrm{Alb}}_X$, falls das Bild zweidimensional ist. Auch dieser ist, da α generisch flach ist, in einer Komponente $N_{g,b}$ deformationsinvariant. Wir wollen ihn hier *Albanese-Grad* γ nennen. Er stimmt im Allgemeinen nicht mit obigem assoziierten Grad überein.

1.3.1 Modulräume für abelsche Schemata

Es sei $\mathcal{A}_{g,d}(\cdot)$ der Funktor, der Isomorphieklassen abelscher Schemata (oder synonym: Familien abelscher Varietäten) der Dimension g mit einer Polarisierung vom Grad d parametrisiert, und $A_{g,d}$ der zugehörige grobe Modulraum. Insbesondere ist $A_g = A_{g,1}$. Weiter bezeichne μ_{d_i} das Gruppenschema der d_i-ten Einheitswurzeln.

Definition 1.3.8. *Ist $\delta = (d_1, \ldots, d_g) \in \mathbb{Z}^g$ mit $d_i \mid d_{i+1}$ und $\prod d_i = d$, so heißt das abelsche Schema $(A/T, \lambda) \in \mathcal{A}_{g,d}(T)$ vom* Typ *δ, falls*

$$Ker(\lambda) \cong \prod_{i=1}^{g} \mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z} \times \prod_{i=1}^{g} \mu_{d_i}.$$

Es bezeichne $\mathcal{A}_{g,\delta}$ den zugehörigen Unterfunktor von $\mathcal{A}_{g,d}$.

Über dem Grundkörper $\mathbb{C}$ sind die Gruppenschemata μ_{d_i} und $\mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z}$ isomorph. In diesem Fall ist eine Polarisierung der abelschen Varietät $A = V/U$ vom Typ δ, falls es eine Basis des Gitters U gibt, bzgl. der die alternierende Form die Darstellungsmatrix

$$D = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{diag}(\delta) \\ -\mathrm{diag}(\delta) & 0 \end{pmatrix}$$

besitzt. Solch eine Basis nennen wir eine *symplektische Basis (vom Typ δ).*
Die Struktur von $A_{g,d}$ über $\mathbb{C}$ kennen z.B. Mumford und Fogarty ([MF82] App. 7A):

Satz 1.3.9. *$A_{g,d} \times \mathbb{C}$ ist die Vereinigung der endlich vielen Komponenten $A_{g,\delta} \times \mathbb{C}$. Die Schemata $A_{g,\delta}$ sind irreduzibel und über $\mathbb{C}$ isomorph zu $\mathfrak{h}_g/\Gamma_D$. Dabei ist $\mathfrak{h}_g$ der Siegelsche Halbraum der Dimension g und Γ_D die symplektische Gruppe*

$$\Gamma_D = \{M \in \mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{Z}) \mid MDM^T = D\}.$$

Bezeichnung 1.3.10. Wir benötigen noch einige andere symplektische Gruppen: Liegen die Koeffizienten nicht in $\mathbb{Z}$ sondern in einem anderen Ring R, bezeichnen wir die Gruppe mit $\Gamma_D(R)$. Ist speziell D die Einheitsmatrix, so verwenden wir die Notation $Sp(g, R)$.
Man verwechsle obige Notation nicht mit der ebenfalls in Kapitel 4 benötigten Kongruenzuntergruppe

$$\Gamma(d) = \{M \in SL_2(\mathbb{Z}), \quad M \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mod d\},$$

die in bekannter Art auf $\mathfrak{h} := \mathfrak{h}_1$ operiert. Der Quotient ist die Modulkurve $X'(d)$, der zu einer vollständigen Kurve (dann mit $X(d)$ bezeichnet) natürlich noch einige Spitzen fehlen.

In dieser Arbeit benötigen wir Levelstrukturen nur aus technischen Gründen, um feine Modulräume für Kurven und abelsche Schemata mit dieser Zusatzstruktur zu haben. Wir beschränken uns weiterhin auf polarisierte abelsche Schemata $(A/T, \lambda)$ über $\mathbb{C}$. Die Polarisierung liefert eine Paarung auf dem Gruppenschema der n-Teilungspunkte

$$E_n \colon {}_nA \times {}_nA \to \mu_n.$$

Definition 1.3.11. *Eine* symplektische Level-n-Struktur *auf $(A/T, \lambda)$ ist ein Isomorphismus $\alpha \colon {}_nA \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$, der äquivariant bzgl. E_n und der symplektischen Standardpaarung auf $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$ ist. Da wir keine anderen Levelstrukturen benötigen, lassen wir das Adjektiv 'symplektisch' ab sofort weg.*
Der Funktor $\mathcal{A}_g^{[n]}(\cdot)$ parametrisiere Isomorphieklassen von abelschen Schemata mit Level-n-Struktur und $\mathfrak{C}_g^{[n]}(\cdot)$ parametrisiere Isomorphieklassen von Kurven in $\mathfrak{C}_g(\cdot)$ zusammen mit einer Level-n-Struktur der Jacobischen.

Satz 1.3.12. *Für $n \geq 3$ ist $\mathfrak{C}_g^{[n]}$ durch ein quasiprojektives Schema $M_g^{[n]}$ darstellbar, das für $g \geq 3$ eine galoissche Überlagerung mit der Galoisgruppe $\mathrm{Sp}(g, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ von M_g ist.*

Satz 1.3.13. *Für $n \geq 3$ ist $\mathcal{A}_g^{[n]}$ durch ein quasiprojektives Schema $A_g^{[n]}$ darstellbar, das eine galoissche Überlagerung von M_g mit der Galoisgruppe $\mathrm{Sp}(g, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$ ist.*

Die **Beweise** dazu findet man in [MF82] und [Po77]. □

Man beachte, dass $\mathcal{A}_g^{[n]}$ darstellbar ist, obwohl jedes abelsche Schema den nichttrivialen Automorphismus (-1) besitzt (der Modul-Stack liegt zweiblättrig über dem Modulraum). Dies wird im folgenden Abschnitt Quelle einer Reihe von technischen Problemen sein.

1.3.2 Torelli-Variationen

Torelli hat gezeigt, dass die Abbildung $i : M_g \to \mathcal{A}_g$ für $g \geq 2$ injektiv auf geometrischen Punkten ist. Oort und Steenbrink [OS80] haben gezeigt, dass sie (wir setzen immer noch Charakteristik Null voraus) sogar ein Isomorphismus auf ihr Bild ist. Für unsere Zwecke benötigen wir eine andere Formulierung auf dem Niveau feiner Modulräume. Sei dazu $g \geq 3$, $n \geq 3$ und Σ die Involution auf $M_g^{[n]}$, die α auf $-\alpha$ abbildet und $V_g^{[n]}$ der Quotient nach dieser Involution.

$$\begin{tikzcd}
M_g^{[n]} \arrow[d, "q"] \arrow[dr, "i^{[n]}"] & \\
V_g^{[n]} \arrow[r, "i_V^{[n]}"] \arrow[d] & A_g^{[n]} \arrow[d] \\
M_g \arrow[r, "i"] & A_g
\end{tikzcd}$$

Es sei $H \subset M_g$ der hyperelliptische Lokus und H_V dessen Urbild in $V_g^{[n]}$. q ist genau über H_V verzweigt, denn dort induziert die (-1) auf der Jacobischen einen Isomorphismus von (C, α) nach $(C, -\alpha)$. Deswegen existiert über $V_g^{[n]} \setminus H_V$ eine universelle Familie von Kurven.

Satz 1.3.14. *$i_V^{[n]}$ ist eine Einbettung.*

Den **Beweis** findet man bei [OS80] Th. 3.1. □

Korollar 1.3.15. *Es seien $h_i : C_i \to T$ für $i = 1, 2$ Familien von glatten Kurven vom Geschlecht $g \geq 2$ ohne hyperelliptische Fasern, mit Schnitten s_i und den davon induzieren Einbettungen $f_i : C_i \to \underline{\mathrm{Jac}}_{C_i/T}$. Ist $\beta : \underline{\mathrm{Jac}}_{C_1/T} \to \underline{\mathrm{Jac}}_{C_2/T}$ ein Isomorphismus, dann gibt es genau einen T-Isomorphismus $\alpha : C_1 \to C_2$ und eine Translation t_c, sodass*

$$f_2 \circ \alpha = t_c \circ \beta \circ f_1.$$

Beweis: Für $T = \operatorname{Spec} \mathbb{C}$ steht die Aussage genau so in [Mil86b] Th. 12.1. Ist $T = \operatorname{Spec} R$ Spektrum eines lokalen artinschen Ringes, so erhält man aus [OS80] Prop. 2.5 einen Isomorphismus der Kurven, der auf der speziellen Faser nach der ersten Aussage eindeutig ist. Da Kurven vom Geschlecht ≥ 2 keine infinitesimalen Automorphismen besitzen, ist er auch ingesamt eindeutig. Die Aussage für ein beliebiges Basisschema folgt aus der Eindeutigkeit mittels treuflachem Abstieg, wie exemplarisch in Abschnitt 2.2 ausgeführt. □

Satz 1.3.16. *Sei $j : J \to T$ eine Familie von prinzipalpolarisierten abelschen Varietäten der Dimension $g \geq 3$, sodass die Modulabbildung $\varphi : T \to A_g$ im Bild $i(M_g \setminus H)$ landet. Dann gibt es genau eine Familie von glatten Kurven $h : C \to T$, deren Jacobische lokal in der $fppf$-Topologie isomorph zu J ist.*

Beweis: Wir benutzen hilfsweise Level-n-Strukturen ($n \geq 3$), um obige Torelli-Sätze anwenden zu können. Sei $T' \to T$ ein treuflacher Basiswechsel, sodass $j' : J' = J \times_T T' \to T'$ eine Level-n-Struktur besitzt. Wir fixieren eine solche und bezeichnen die induzierte Abbildung $T' \to A_g^{[n]}$ mit φ'. Sei $h' : C' \to T'$ das Pullback unter $(i_V^{[n]})^{-1} \circ \varphi'$ der universellen Famile von $V_g^{[n]} \setminus H_V$. Wir fixieren einen Isomorphismus $\underline{\mathrm{Jac}}_{C'/T'} \to J'$ (der allerdings nur bis auf ± 1 eindeutig ist) und nehmen an, dass h' einen Schnitt s' besitzt. Dies kann man durch geeigneten étalen Basiswechsel jederzeit sicherstellen. Der Schnitt induziert eine Einbettung $f' : C' \to \underline{\mathrm{Jac}}_{C'/T'}$. Die Abstiegsdaten auf J' und der Isomorphismus $\underline{\mathrm{Jac}}_{C'/T'} \to J'$ induzieren einen Isomorphismus $\beta_{12} : \mathrm{pr}_1^* \underline{\mathrm{Jac}}_{C'/T'} \to \mathrm{pr}_2^* \underline{\mathrm{Jac}}_{C'/T'}$. Dabei sind wie üblich pr_i die Projektionen $T' \times_T T' \to T$. Obiges Korollar liefert einen Isomorphismus α_{12} zwischen den Pullbacks der Kurven, die mit β_{12} bis

auf Translation kommutiert. Dieser genügt der Kozykelbedingung, da die Abstiegsdaten auf J' dies tun. Die Kurven vom Geschlecht ≥ 2 haben von Natur aus eine ample kanonische Garbe und daher bildet α_{12} nach [BLR90] Th. 6.7 ein effektives Abstiegsdatum.
Zur Eindeutigkeit: Seien $C_i \to T$ für $i = 1, 2$ zwei solche Kurven. Dann hat man nach einem Basiswechsel $T' \to T$ Isomorphismen $\lambda_i : \underline{\mathrm{Jac}}_{C'_i/T'} \to J'$, die wieder nur bis auf ± 1 eindeutig sind. Einmal fixiert sorgen die Kozykelbedingungen auf $\underline{\mathrm{Jac}}_{C'_i/T'}$ und J' jedoch dafür, dass $\lambda_2^{-1} \circ \lambda_1$ mit den Abstiegsdaten verträglich ist. Obiges Korollar liefert also einen Isomorphismus zwischen den Kurven C'_1 und C'_2. Dieser ist der Einzige, der bis auf Translation mit $\lambda_2^{-1} \circ \lambda_1$ kommutiert. Er bildet daher ein Abstiegsdatum und liefert den gesuchten Isomorphismus $C_1 \to C_2$. □

Bemerkung 1.3.17. *Die Morphismen β_{12} in obigem Beweis sind nur bis auf ± 1 die von α_{12} induzierten. Lemma 4.2.10 liefert ein Beispiel, in dem die β_{12} in der Tat kein Abstiegsdatum auf der Jacobischen bilden.*

1.4 Monodromie und Periodenmatrix

Zur Analyse spezieller (singulärer) Fasern einer Familie von Kurven benötigen wir die Begriffe Monodromie und Periodenmatrix. Wir beschränken uns dabei auf Schemata über $\mathbb{C}$ und verwenden die komplex-analytische Sichtweise. (Es sei hier kurz darauf verwiesen, dass man alle in diesem Abschnitt definierten Begriffe oder Analoga auch algebraisch und damit über jedem Grundkörer, oder zumindest über dessen Abschluss, nachbauen kann. Viehweg hat dies für die Invarianten der degenerierten Fasern in [Vie77] durchgeführt.)
Sei also $f : X \to D$ eine Familie von Kurven über der offenen Einheitskreisscheibe. Dieser Begriff soll per Defintion beinhalten, dass alle Fasern über $D_0 = D \setminus 0$ glatt sind.

Definition 1.4.1. *Eine* kanonische Basis *einer glatten Kurve X_s vom Geschlecht g sind Klassen*

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_g, \beta_1, \ldots, \beta_g \in H^1(X_s, \mathbb{Z}),$$

für deren Cup-Produkte gilt:

$$(\alpha_i, \alpha_j) = (\beta_i, \beta_j) = 0 \qquad (\alpha_i, \beta_j) = \delta_{ij}.$$

Sei $0 \neq s \in D$. Da f über D_0 (topologisch) lokal-trivial ist, induzieren die Kartenübergänge längs eines positiv orientierten Weges γ um 0 in $D \setminus 0$ einen Automorphismus

$$\pi(\gamma) : H^1(X_s, \mathbb{Z}) \to H^1(X_s, \mathbb{Z}),$$

genannt Monodromie *von f bzgl. γ. Eine Darstellungsmatrix hiervon bzgl. einer kanonischen Basis heißt* Monodromiematrix*.*
Identifiziert man die α_i und β_i mit ihren Bildern in $H^1(X_s, \mathcal{O}_{X_s})$, so ist die Periodenmatrix $T(s) \in \mathbb{C}^{g \times g}$ *definiert durch die Beziehung*

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_g) = -(\beta_1, \ldots, \beta_g)T(s).$$

Die Periodenmatrix hängt holomorph von s ab und genügt den Riemannschen Periodenrelationen. Per Definition ist die Monodromiematrix nur bis auf Konjugation in $Sp(g, \mathbb{Z})$ eindeutig. Für Details siehe z.B. [BPV84] Abschnitt III.15.

Bemerkung 1.4.2. Analog definiert man den Begriff Monodromie auch für eine Familie von abelschen Varietäten über der offenen Einheitskreisscheibe. Per Definition stimmt die Monodromie einer Familie von Kurven mit der ihrer Jacobischen überein.
Aufgrund des kanonischen Isomorphismus $H^1(X_s, \mathbb{Z}) \to H^1(\underline{\mathrm{Jac}}_{X_s}, \mathbb{Z})$ induziert jede kanonische Basis von X_s eine symplektische Basis von $\underline{\mathrm{Jac}}_{X_s}$ vom Typ $(1, \ldots, 1)$, die wir bei Bedarf identifizieren.

Satz 1.4.3. *Ist die Monodromie einer Familie von Kurven $X \to D$ unipotent, dann kann man ein stabiles Modell (und ein semi-stabiles Modell mit glattem Totalraum) ohne Basiswechsel durch geeignetes Aufblasen von X erhalten.*

Beweis: Sei $J_0 \to D_0$ die relative Jacobische von $X|_{D_0}$. Aufgrund der Monodromie-Voraussetzung lässt sich diese zu einer semi-abelschen Varietät J über D fortsetzen (vgl. [FC90] Th. V.6.7 oder [Na76] Th. 17.6). Sei $D' \to D$ eine zyklische Überlagerung, sodass das minimale Modell X' von $X \times_D D'$ semistabil ist ([DM69]). Dann ist $\underline{\mathrm{Jac}}_{X'/D'}$ eine semiabelsche Varietät, isomorph zu $J \times_D D'$ aufgrund des Fortsetzungssatzes für Morphismen semiabelscher Varietäten ([FC90] Prop. I.2.7). Sei σ ein Erzeuger von $\mathrm{Aut}(D'/D)$. Nach Konstruktion operiert σ auf der Faser über 0 von J'

trivial. Dann ist aber bekanntlich ([DM69] Th. 1.13) die Operation von σ auf der Faser über 0 von X' trivial und z.B. nach [Vie77] Lemma 7.3 folgt die Behauptung. $\square$

Für isotriviale Faserungen $X \to B$ (siehe Definition 3.1.1) gibt es noch einen weiteren Monodromiebegriff. Sei B^0 der Ort über dem die Fasern glatt sind (und damit paarweise isomorph), und γ ein geschlossener Weg in B^0 . Die Kartenübergänge entlang einer Trivialisierung von $X \to B$ über γ induzieren für ein $b \in \gamma$ einen Automorphismus der Faser über b. Alle Wege zusammen definieren somit einen Homomorphismus

$$\pi : \pi_1(B^0, b) \to \mathrm{Aut}(F_b).$$

Definition 1.4.4. *Das Bild von π heißt* Monodromiegruppe *der isotrivialen Faserung $X \to B$.*

Kapitel 2

Existenz einer natürlichen Transformation „Gefaserte Fläche nach Basiskurve“

Im ersten Abschnitt werden zunächst die Begriffe 'Irregularität' einer Fläche und einer Faserung definiert. Dieses sind zentrale Begriff in der gesamten Arbeit. Der Abschnitt versucht auch, möglichst vollständig die vielfältigen Zusammenhänge der Irregularität mit den Invarianten der gefaserten Fläche zusammenzufassen. Für die Beweise muss der Leser dabei auf die Literatur verwiesen werden.
Bei der Untersuchung der Modulräume in den folgenden Abschnitten ist es technisch wichtig zu wissen, wann man einer Familie gefaserter Flächen funktoriell die Basiskurve zuordnen kann. Bei regulär gefaserten Flächen leistet dies die Albanese-Abbildung, bei irregulären liefert eine Eindeutigkeitsaussage eine hinreichende Bedingung. Mit deren Beweis beschäftigt sich der zweite Abschnitt.
Der Rest des Kapitels ist der Verifikation dieses Kriteriums für die im Folgenden untersuchten Flächen gewidmet.

2.1 Irreguläre Faserungen

Zunächst betrachten wir die gefaserten Flächen sozusagen punktweise und verwenden glatte und gegebenenfalls relativ minimale Modelle. Sei also $S \to \operatorname{Spec} \mathbb{C}$ eine gefaserte Fläche und $h : S \to B$ eine Faserung vom Typ (g, b). Bezeichnet man mit $q = \dim H^1(S, \mathcal{O}_S)$ die Irregularität der Fläche, so gilt das fundamentale

Lemma 2.1.1. *(Beauville [Bea82]) Es ist $b \leq q \leq g + b$ und $q = g + b$ genau dann, wenn S birational zum Produkt ist.*

Definition 2.1.2. *Eine gefaserte Fläche heißt* irregulär gefasert*, falls gilt: $b < q < g + b$. Ist $q = g + b - 1$, so nennen wir die Faserung* maximal irregulär.

Maximal irreguläre Faserungen gibt es nur für kleine g, wie folgende Verschärfung des obigen Lemmas besagt.

Satz 2.1.3. *Für irreguläre Faserungen gilt*

$$q < b + \frac{5g + 1}{6}.$$

Es gibt Beispiele von maximal irregulären Faserungen mit $g = 4$.

Beweis: Siehe [Xi87] Cor. 2 (zu Th. 2). Für die Beispiele siehe [Pi89]. □

Beispiele für maximal irregulär gefaserte Flächen mit $g > 4$ sind in der Literatur nicht bekannt.

Xiao Gang hat für gefaserte Flächen folgendes nützliche Verhältnis eingeführt, das sich durch seine Invarianz unter vielen Pullbacks über Morphismen der Basiskurve auszeichnet.

Definition 2.1.4. *Die* Steigung $\lambda(h)$ *(oder kurz λ) einer gefaserten Fläche $h : S \to B$ ist definiert durch:*

$$\lambda = \frac{K_{S/B}^2}{\deg h_* \omega_{S/B}}$$

Lemma 2.1.5. *Sei $h : S \to B$ das relativ minimale Modell einer gefaserten Fläche und $B' \to B$ ein Morphismus, der höchstens über den Bildern von semistabilen Fasern von h verzweigt. Ist $h' : S' \to B'$ das relativ minimale Modell des Pullbacks unter dem Basiswechsel $B' \to B$, so gilt*

$$\lambda(h) = \lambda(h').$$

Beweis: Bei solchen Basiswechseln ist $\omega_{S'/B'} = \pi^* \omega_{S/B}$, wobei $\pi : S' \to S$ der natürliche Morphismus ist. Daraus rechnet man die Behauptung direkt nach. □

Aus der Definition erkennt man sofort, dass λ a priori vom Modell der Fläche abhängt, aber bei Flächen vom allgemeinen Typ die Steigung des minimalen und des kanonischen Modells übereinstimmt.
Wir fassen die Eigenschaften von λ im folgenden Satz zusammen:

Satz 2.1.6. *Es gilt stets*

$$K_X^2 = \lambda\chi(\mathcal{O}_X) + (8-\lambda)(b-1)(g-1).$$

λ ist invariant unter einem Basiswechsel, der höchstens über den Bildern der semistabilen Fasern von h verzweigt.
Für eine nicht isotriviale (siehe Abschn. 3.1), irreguläre Faserung ist $\lambda \geq 4$.
Für eine irreguläre Faserung mit $\lambda = 4$ ist $q = g + 1$.

Beweis: Für die erste Aussage siehe [Xi87] Abschnitt 1. Die zweite Aussage ist unmittelbare Konsequenz daraus, dass für einen solchen Basiswechsel $\pi : B' \to B$ und die zugehörige Projektion $\overline{\pi} : S' = S \times_B B' \to B$ die Beziehung $\omega_{S'/B'} = \overline{\pi}^* \omega_{S/B}$ gilt.
Zum Beweis der letzten beiden Aussage siehe [Xi87] Cor. 1 (zu Th. 1) bzw. [Xi87] Th. 3. $\square$

Wir wollen nun den Begriff 'irregulär gefasert' noch auf die relative Situation ausdehnen.

Im Rest dieses Kapitels setzen wir voraus, dass für die gefaserten Flächen (FV) und (BV) gilt.

Da diese Flächen vom allgemeinen Typ sind, verwenden wir von nun ab kanonische Modelle, die sich in Familien besser benehmen.

Definition 2.1.7. *Eine* irregulär gefaserte Familie von Flächen $X \to B \to T$ *ist eine gefaserte Familie, in der eine (und damit alle) Flächen irregulär gefasert sind. Analog definiert man* maximal irregulär gefaserte Familie.

Wir bezeichen das Bild des Albanese-Morphismus im Albanese-Schema kurz als Albanese-Bild.

Bemerkung 2.1.8. *Das Albanese-Bild einer gefaserten Fläche ist genau dann eine Kurve, wenn $q = b$ ist. Insbesondere ist die Dimension des Albanese-Bildes deformationsinvariant.*

Beweis: Die Faserung $h : X \to B$ induziert einen Morphismus der Albanese-Varietäten h' und durch Einschränken einen Morphismus der Albanese-Bilder $\tilde{h}' : \alpha_X(X) \to \alpha_B(B)$. Ist $q = b$, so ist h' und damit auch $\tilde{h}'$ die Identität.
Wäre umgekehrt das Bild einer irregulären Faserung eine Kurve, so wäre ihr Geschlecht größer als b. Dann aber hätte $\tilde{h}'$ keine zusammenhängenden Fasern, im Widerspruch dazu, dass h eine Faserung ist. □

Aufgrund dieser Bemerkung wird für reguläre gefaserte Flächen die Existenz der natürlichen Transformation „Fläche nach Basiskurve“ durch den Funktor Alb(·) erledigt. Da der Schnitt und damit der Albanese-Morphismus nur étale-lokal existiert (Korollar 1.3.4), tritt ein abstiegstechnisches Problem auf, das uns auch im irregulär gefaserten Fall begegnet. Wir fassen daher diesen 'Trivialfall' am Ende des folgenden Abschnitts noch einmal zusammen, kümmern uns aber vorrangig um irreguläre Faserungen.

2.2 Ein Existenzkriterium

Sei $X \to T$ in $\mathfrak{S}_{g,b}$ eine Familie irregulär gefaserter Flächen und zunächst T Spektrum eines lokalen Ringes R. Durch einen treuflachen, quasikompakten Basiswechsel erhält man eine Familie $f' : X' \to T'$, $T' = \operatorname{Spec} \hat{R}$ über dessen Komplettierung. Diese ist eine Deformation des Morphismus $f_0 : X_0 \to \operatorname{Spec} k$ über dem abgeschlossenen Punkt. Nach Satz A.1.3 gibt es eine Deformation h' des Morphismus $h_0 : X_0 \to B_0$ über $\operatorname{Spec} \hat{R}$, deren Bild in $\operatorname{Def}_{X_0}(\operatorname{Spec} \hat{R})$ gerade f' ist. (X', h') ist also eine Familie gefaserter Flächen. Wir halten hier zwei Flachheitskriterien fest, die uns in der Folge noch öfter nützlich sein werden.

Lemma 2.2.1. *Seien $f : X \to T$, $g : B \to T$ und $h : X \to B$ surjektive Morphismen mit $f = g \circ h$. Dann sind g und h genau dann flach, wenn f flach ist und die Fasern von h über allen Punkten von T flach sind ([EGA] IV, 11.3.11).*

Korollar 2.2.2. *Ist mit den Bezeichnungen des vorherigen Lemmas f flach mit höchstens rationalen Singularitäten in den Fasern und g glatt, so ist auch h flach.*

Beweis: Dies folgt aus dem vorherigen Lemma und dem Flachheitskriterium in [Ha77] III, Ex. 10.9. □

Aus dem Korollar folgt in unserer Situation, dass h' ebenfalls flach ist.

Mit folgender Zusatzvoraussetzung kann man sicherstellen, dass diese Deformation zu einer Faserung über T absteigt:

Definition 2.2.3. *Eine Familie von Flächen $f : X \to T$ hat* höchstens eine Faserung vom Typ (g, b), *falls es zu je zwei solchen Faserungen der Familie $h_i : X \to B_i$ über T, $i = 1, 2$, einen T-Isomorphismus $\psi : B_1 \to B_2$ mit $\psi \circ h_1 = h_2$ gibt.*
Eine Komponente $N_{g,b}$ des Modulraums für gefaserte Flächen vom Typ (g, b) habe diese Eigenschaft, falls sie für alle Schemata T und alle Flächen in $\mathfrak{S}_{g,b}(T)$ erfüllt ist.

Für solche Flächen erhält man aus dem Morphismus $h' : X' \to B'$ über T' ein Abstiegsdatum: Seien $T'' = T' \times_T T'$ und $pr_i : T'' \to T'$ für $i = 1, 2$ die beiden Projektionen. Da X' von einem Schema über T herkommt, hat man einen kanonischen T''-Isomorphismus $\phi : pr_1^* X' \to pr_2^* X'$, der der Kozykelbedingung genügt. Ist also $T''' = T' \times_T T' \times_T T'$ mit den Projektionen pr_{ij} für $1 \leq i < j \leq 3$, so ist

$$pr_{13}^* \phi^{-1} \circ pr_{23}^* \phi \circ pr_{12}^* \phi = \mathrm{id}_{pr_{12}^* pr_1^* X'}.$$

Damit hat $pr_1^* X'$ also zwei Faserungen $h_1 = pr_1^* h'$ und $h_2 = pr_2^* h' \circ \phi$. Nach Voraussetzung gibt es also einen T''-Morphismus $\psi : pr_1^* B' \to pr_2^* B'$, der mit ϕ kommutiert. Daher ist

$$\begin{aligned} pr_{12}^* pr_1^* h' &= pr_{12}^* pr_1^* h' \circ pr_{13}^* \phi^{-1} \circ pr_{23}^* \phi \circ pr_{12}^* \phi \\ &= pr_{13}^* \psi^{-1} \circ pr_{23}^* \psi \circ pr_{12}^* \psi \circ pr_{12}^* pr_1^* h' \end{aligned},$$

und da h' surjektiv ist, erfüllt ψ die Kozykelbedingung.
Um zu zeigen, dass diese Abstiegsdaten effektiv sind, verwenden wir folgendes Überdeckungskriterium ([BLR90] Theorem 6.1.6). Wir benötigen dazu eine Überdeckung von B' durch offene Mengen V', die affin über T' und mit dem Abstiegsdatum kompatibel sind. Da X' von unten kommt, gibt es dort so eine Überdeckung durch offene Mengen U'. Die Bilder $V' = h'(U')$ sind offen, da h' flach ist, und leisten das Verlangte. In der Tat ist für jedes affine $\tilde{T}'$ der Morphimus $\tilde{h}'$ affin, da bereits $\tilde{f}'$ affin ist ([EGA] II, 1.6.2). Dabei bezeichnen die Tilden stets die Einschränkungen nach $\tilde{T}'$. Sei $\mathcal{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_{\tilde{V}'}$-Modul. Wegen der Eigenschaft 'Faserung' ist $h'_*(\mathcal{O}'_X) = \mathcal{O}'_B$, also $\mathcal{F}$ ein quasi-kohärenter $\tilde{h}'_*(\mathcal{O}_{\tilde{U}'})$-Modul. Nach ([EGA]

II, Prop. 1.4.3) ist folglich $\mathcal{F} = \tilde{h}'_*\mathcal{K}$ für einen kohärenten $\mathcal{O}_{\tilde{U}'}$-Modul $\mathcal{K}$. Und affin impliziert $H^1(\tilde{U}', \mathcal{K}) = 0$ und somit $H^1(\tilde{V}', \mathcal{F}) = 0$. Aus dem Kriterium vom Serre folgt jetzt die Behauptung.
Die Eigenschaft 'glatt' ist nach Bemerkung A.1.2 invariant unter infinitesimalen Deformationen und steigt ebenso wie 'eigentlich' nach ([EGA] IV, 2.7.1 und 17.7.4) ab. Damit haben wir den Fall eines lokalen Ringes als Basis erledigt.

Wir wollen den Funktor nun auf ein beliebiges noethersches Basisschema T ausdehnen:
Sei T durch $\operatorname{Spec} A_i$ affin überdeckt und $\mathfrak{p}$ ein minimales Primideal in $A := A_1$. Über $A_\mathfrak{p}$ gibt es, wie gesehen, eine Faserung $h_\mathfrak{p} : X \times_T \operatorname{Spec} A_\mathfrak{p} =: Y_\mathfrak{p}$. Dieser Morphismus ist in der Tat über einer offenen Umgebung $U_\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{p}$ definiert, da man nur endlich viele Nenner aufnehmen muss.
Das Komplement dieser $U_\mathfrak{p}$, wobei $\mathfrak{p}$ die minimalen Primideale der A_i durchläuft, besteht aus endlich vielen Komponenten, deren Dimension echt kleiner als die ursprüngliche ist. Induktiv erhält man so eine endliche Überdeckung $\coprod U_\mathfrak{p} \to T$, also einen treuflachen, quasi-kompakten Morphismus, über den die Faserung wie oben absteigt. Zusammengefasst:

Satz 2.2.4. *Ist $N_{g,b}$ eine Komponente des Modulraums für Flächen vom allgemeinen Typ, die irregulär gefaserte Flächen mit höchstens einer Faserung vom Typ (g, b) parametrisiert, so gibt es eine natürliche Transformation $\mathfrak{S}_{g,b} \to \mathfrak{C}_b$, die – auf den $\mathbb{C}$-wertigen Punkten – jede Fläche auf ihre Basiskurve abbildet.*
Insbesondere hat man für solche Komponenten einen Morphismus $N_{g,b} \to M_b$.

Kommen wir kurz auf den 'trivialen' Fall einer regulären Faserung zurück.

Satz 2.2.5. *Ist $N_{g,b}$ eine Komponente des Modulraums für Flächen vom allgemeinen Typ, die regulär gefaserte Flächen vom Typ (g, b) parametrisiert, so gibt es eine natürliche Transformation $\mathfrak{S}_{g,b} \to \mathfrak{C}_b$, die – auf den $\mathbb{C}$-wertigen Punkten – jede Fläche auf ihre Basiskurve abbildet.*
Insbesondere hat man stets einen Morphismus $N_{g,b} \to M_b$.

Beweis: Nach einem geeigneten Basiswechsel mit einem étalen Morphismus $T' \to T$ hat die Familie $X \to T$ gefaserter Flächen einen Schnitt s' und man hat nach Korollar 1.3.4 den Albanese-Morphismus $\alpha : X' \to \underline{\mathrm{Alb}}_{X'/T'}$.

Dessen Bilder sind nach Voraussetzung Familien von Kurven $B' \to T'$. Die auf $T'' = T' \times_T T'$ über die beiden Projektionen zurückgezogenen Schnitte nennen wir s_1'' und s_2''. Offenbar definieren die Differenzen $\alpha \circ s_1'' - \alpha \circ s_2''$ durch Translation Isomorphismen $pr_1^* B' \to pr_2^* B'$. Diese genügen der Kozykelbedingung und das Abstiegsdatum ist aus oben genannten Gründen effektiv. □

2.3 Welche Flächen haben höchstens eine Faserung von festem Typ?

Ein Klasse von Beispielen für solche Flächen liefert:

Satz 2.3.1. *Eine Familie von Flächen $X \to T$ in $\mathfrak{S}_{g,b}(T)$ deren Fasern X_t*

$$K_X^2 > 4(g-1)^2$$

erfüllen, hat höchstens eine Faserung vom Typ (g, b).

Beweis: In der absoluten Situation ($T = \operatorname{Spec} \mathbb{C}$)) geht dies auf [Xi85] Prop. 6.4 zurück: Seien h_i für $i = 1, 2$ zwei Faserungen von X und F_i allgemeine Fasern von h_i. Dann impliziert die Voraussetzung über K_X^2 und das Indextheorem, dass $F_1 \cdot F_2 < 2$: Sei D folgender $\mathbb{Q}$-Divisor:

$$D = \frac{F_1}{K \cdot F_1} + \frac{F_2}{K \cdot F_2} - \frac{2K}{K^2}.$$

Dann ist $D \cdot K = 0$, also $D^2 < 0$. Ausmultiplizieren unter Beachtung von $F_i^2 = 0$ liefert die Behauptung. Man betrachte den Produktmorphismus $h : X \to B_1 \times B_2$. Wäre das Bild 2-dimensional, so wäre notwendigerweise $F_1 \cdot F_2 = 1$ und h ein Isomorphismus, im Widerspruch zu 'irregulär gefasert'. Ist das Bild eine Kurve, so sind die Projektionen nach B_i Isomorphismen, da h_i zusammenhängende Fasern hat.
Bei beliebigem T betrachtet man wieder den Produktmorphismus h. Dessen Bild ist faserweise wie oben eindimensional und es ist flach über T nach Lemma 2.2.1, also eine Familie von Kurven.
Die Projektionen $p_i : \operatorname{Bild}(h) \to B_i$ sind quasiendlich und eigentlich, also nach ([EGA] IV, 18.12.4) endlich, über jedem abgeschlossenen Punkt von t sogar Isomorphismen. Es ist nur noch zu prüfen, dass es auch ingesamt

Isomorphismen sind. Der absolute Fall zeigt, zusammen mit dem Kriterium [EGA] I, 3.7.1, dass p_i radiziell ist. Das Lemma 2.2.1 impliziert, dass p_i flach ist, und über den abgeschlossenen Punkten étale. Da letzteres für endliche Morphismen eine offene Bedingung ist ([EGA] IV, 18.2.4), liefert ([EGA] IV, 17.9.1) die Behauptung. □

Das folgende Lemma ist eine Anwendung dieses Kriteriums, die wir in Kapitel 4 benötigen. Wir verwenden dazu einige Begriffe, die zu Beginn des folgenden Kapitels eingeführt werden.

Lemma 2.3.2. *Die Eindeutigkeit der Faserung ist unter (BV) für $g = 2$ sowie für Faserungen mit $g = 3$ und $q = g + 2$, die nicht isotrivial sind, erfüllt.*

Beweis: Nach Satz 3.1.6 ist $K_X^2 \geq 8(b-1)(g-1)$ und dies genügt unter (BV) für $g = 2$ bereits. Für $g = 3$ ist noch der Fall $K_X^2 = 16$ und $b = 2$ auszuschließen. Nach Satz 2.1.6 folgt daraus $0 = \lambda(\chi - 2)$. Aus den beiden zitierten Sätzen folgt auch, dass $\lambda \geq 4$ ist. Also müsste $\chi = 2$ sein, im Widerspruch zu Teil iii) von Satz 3.1.6. □

Kapitel 3

Isotrivial gefaserte Flächen

Der erste Abschnitt beschäftigt sich mit der Beschreibung von isotrivialen Flächen als Quotient eines Produkts von Kurven modulo einer Gruppe.
Es stellt sich heraus, dass der Begriff isotrivial nicht deformationsinvariant ist. Im zweiten Abschnitt zeigen wir, dass isotriviale Flächen in einer Komponente des Modulraums sogar verschiedene Trivialisierungsgruppen haben können. Wir benutzen natürliche Deformationen von abelschen Überlagerungen, um in den einfachsten Fällen etwas über die lokale Struktur der Modulräume in der Nähe einer isotrivialen Fläche auszusagen.
Im dritten Abschnitt betrachten wir spezielle isotriviale Flächen, sogenannte produktisogene. Für diese lässt sich die Moral, den Modulraum als Faser plus Basis plus Zusatzstruktur zu beschreiben, in der Tat umsetzen.

3.1 Charakterisierung spezieller isotrivialer Flächen

Sei S eine glatte, gefaserte Fläche, $h : S \to B$ eine Faserung und $B^0 \subseteq B$ der Ort, über dem die Fasern glatt sind.

Definition 3.1.1. *Die Faserung h heißt* isotrivial, *falls das Fasergeschlecht $g > 0$ und das Bild der kanonischen Abbildung $B^0 \to M_b$ einpunktig ist.*
Eine Fläche S heißt produktisogen, *falls es eine unverzweigte Überlagerung von S gibt, die isomorph zum Produkt von zwei Kurven ist.*
Eine glatte, isotriviale Faserung heißt Faserbündel.

Zunächst zur Bestimmung der Struktur von isotrivialen Flächen. Wir bleiben in diesem Abschnitt in der absoluten Situation und nehmen für S ein glattes, relativ minimales Modell.

Bemerkung 3.1.2. Ist $S \to B$ isotrivial mit generischer Faser C_2, so gibt es eine Gruppe G, die als Automorphismengruppe auf C_2 operiert, und eine Kurve C_1 mit G-Aktion, sodass folgendes gilt: $C_1/G = B$ und man hat eine birationale Abbildung $\varepsilon : S \to (C_1 \times C_2)/G$, wobei G diagonal auf dem Produkt operiert.
Gilt (FV), so ist ein minimales G eindeutig bestimmt und gleich der Monodromiegruppe (siehe Def. 1.4.4).

Beweis: Gilt (FV), so ist $\mathrm{Aut}(C_2)$ und damit erst recht das Bild von $\pi_1(B^0)$ unter der Monodromie darin endlich. Sei $C_1^0 \to B^0$ die zum Kern gehörige endliche Überlagerung. $C_1^0 \times_{B^0} S|_{B^0}$ hat triviale Monodromie, ist also topologisch und damit auch algebro-geometrisch ein Produkt. Eine Kompaktifizierung von C_1^0 leistet das gewünschte. Der Fall $g(C_2) = 1$ wird in [Ser96] behandelt, im Folgenden aber nicht benötigt. □

Wir bezeichnen $(C_1 \times C_2)/G$ im Folgenden mit Q und setzen $B_2 = C_2/G$ und aus Symmetriegründen $B_1 = C_1/G = B$. Im folgenden heißen die Faserungen nach B_1 bzw. B_2 auch h_1 bzw. h_2 und es sei kurz $Y = B_1 \times B_2$ Mit diesen Vokabeln lässt sich die Struktur einer isotrivialen Fläche wie folgt zusammenfassen ([Ser96] Th. 2.1):

Theorem 3.1.3. *Eine Faser von $Q \to B_1$ über einem Punkt $b \in B_1$ ist genau dann glatt, wenn b Bild eines Punktes in C_1 mit trivialem Stabilisator ist. Andernfalls ist sie isomorph zu C_2/H mit Vielfachheit $|H|$, wobei H die zyklische Gruppe ist, die ein Urbild von b in C_1 stabilisiert.*
Hat $C_2 \to C_2/H$ einen Verzweigungspunkt, so hat Q in der Faser über b eine Quotientensingularität, die man durch eine Hirzebruch-Jung-Kette vom entsprechenden Typ (vgl. [BPV84] Abschn. II.5) auflösen kann.

Korollar 3.1.4. *Ist $g(C_2/G) > 0$, so ist ε ein Morphismus.*

Beweis: Sei $V \to Q$ eine Auflösung der Singularitäten. Wäre ε kein Morphismus, so müsste wegen der Minimalität von S in der Fläche V eine (-1)- oder (-2)–Kurve enthalten sein, die von $V \to Q$ nicht kontrahiert wird. Diese müsste dann surjektiv nach C_2/G abgebildet werden, im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Bemerkung 3.1.5. Bei dieser Definition von produktisogen wird a priori nicht verlangt, dass X eine Faserung hat. Dies folgt jedoch aus der Beschreibung solcher Flächen mit Ausnahme des sogenannten gemischten Typs,

siehe Satz 3.3.1.
Ein Faserbündel ist nach obiger Bemerkung dadurch charakterisiert, dass der minimale trivialisierende Basiswechsel étale ist.

Die Geographie isotrivialer Flächen in der Invarianten-Landkarte ist durch den folgenden Tripelsatz so gut wie möglich charakterisiert:

Satz 3.1.6. *i) (Zeuthen-Segre) Die Eulercharakteristik einer gefaserten Fläche S genügt der Ungleichung*

$$c_2(S) \geq 4(g-1)(b-1).$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn S topologisch ein Faserbündel ist.
ii) (Arakelov) Für eine minimale gefaserte Fläche S gilt

$$K_S^2 \geq 8(g-1)(b-1).$$

Falls S eine isotriviale Faserung hat, so gilt sogar Gleichheit.
iii) (Beauville) Für eine minimale gefaserte Fläche S gilt

$$\chi(\mathcal{O}_S) \geq (g-1)(b-1)$$

und Gleichheit genau dann, wenn S ein Faserbündel ist.
Insbesondere sind Faserbündel deformationsinvariant, aber Faserungen mit konstantem Modulus nicht notwendig deformationsinvariant (vgl. dazu Abschnitt 3.2).

Bemerkung 3.1.7. *Isotriviale Faserungen sind nicht notwendig deformationsinvariant.*

Ein einfaches Beispiel ist $(C_1 \times C_2)/G$, wobei $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ diagonal, aber auf keiner der beiden Kurven frei operiert. Der Quotient ist eine 2-blättrige Überlagerung von $B_1 \times B_2$, wobei $B_i = C_i/G$, verzweigt über einer Vereinigung von horizontalen und vertikalen Schnitten. Deformiert man diesen Divisor zu einem linear äquivalenten glatten, wie im folgenden Abschnitt noch genauer ausgeführt, so erhält man eine nicht mehr isotrivial gefaserte Fläche.

3.2 Isotriviale Inseln im Modulraum

Sei N_I eine (zu untersuchende) Komponente des Modulraums für Flächen vom allgemeinen Typ, die eine isotriviale Fläche enthält. Weiter sei $\mathfrak{S}_I$

der zugehörige Unterfunktor. Unter (FV) und (BV) haben alle Flächen in $\mathfrak{S}_I(\mathbb{C})$ eine Faserung. Gute Strukturaussagen über solche Flächen erhalten wir aber nur, falls auch die andere Faserung der isotrivialen Fläche deformationsinvariant ist. Dies ist eine zusätzliche Bedingung an die Fasern, die wir als Generalvoraussetzung festhalten.

Eine Faserung $S \to B$ vom Typ (g, b) genügt der *stärkeren Faservoraussetzung (sFV)*, falls $q(S) \geq b + 2$ ist.

Setzt man $b_i = g(B_i)$, so bedeuten (BV) und (sFV), dass $b_1 \geq 2$ und $b_2 \geq 2$ ist. Es überrascht nicht, dass unter diesen Voraussetzungen der Albanese-Morphismus eine natürliche Transformation $\eta : \mathfrak{S}_I \to \mathfrak{C}_{b_1} \times \mathfrak{C}_{b_2}$ liefert:

Lemma 3.2.1. *Ist $X \to T \in \mathfrak{S}_I(T)$ eine Familie von Flächen mit Schnitt und gilt (sFV) und (BV), so ist das Albanese-Bild das Produkt zweier glatter Kurven vom Geschlecht b_1 bzw. b_2 über T.*

Beweis: Zunächst sei $T = \operatorname{Spec}\mathbb{C}$ und X isotrivial. Nach [Ser96] Prop. 2.2 ist die Albanese-Varietät $b_1 + b_2$-dimensional. Die universelle Eigenschaft angewandt auf die beiden Faserungen von X liefert also eine Isogenie der Albanese-Varietät auf das Produkt der Jacobischen von B_1 und B_2, die sich zu einer Überlagerung der Albanese-Bilder $\alpha(X) \to B_1 \times B_2$ einschränkt. Das Bild von $B_1 \times B_2$ unter der dualen Isogenie muss wiederum eine abelsche Varietät der Dimension $b_1 + b_2$ erzeugen. Also muss das Bild einer horizontalen (bzw. vertikalen) Kurve das gleiche Geschlecht wie die Ausgangskurve haben. Wegen (sFV) und (BV) kann dies nur bei der trivialen Überlagerung passieren. Bei diesem Argument wurden nur die Existenz der Faserungen und numerische Invarianten verwendet. Es gilt also für alle Flächen in $\mathfrak{S}_I(\mathbb{C})$ analog.
Um die Produktstruktur auch in der relativen Situation zu erhalten, nehme man den Quotienten des relativen Albanese-Schemas nach dem von einer der beiden Kurven erzeugten abelschen Unterschema. Das Bild von X/T ist die andere relative Kurve. □

Korollar 3.2.2. *Unter (sFV) und (BV) gibt es eine natürliche Transformation*

$$\eta : \mathfrak{S}_I \to \mathfrak{C}_{b_1} \times \mathfrak{C}_{b_2}.$$

Der **Beweis** ist wörtlich das gleiche Abstiegsargument wie in 2.2.5.

Satz 3.2.3. *Sind* $X_s, X_t \in \mathfrak{S}_I(\mathbb{C})$ *zwei isotriviale Flächen in einer Komponente* N_I *des Modulraums, für die (sFV) und (BV) gilt, so sind im Allgemeinen nicht die Monodromiegruppen* G_s *und* G_t*, sondern nur ihre Elementanzahlen gleich.*

Beweis: Sei $X \to T \in \mathfrak{S}_I(T)$ eine Familie über einer zusammenhängenden Basis T, sodass X_s bzw. X_t die Fasern über $s, t \in T$ sind. Nach obigem Lemma gibt es Familien von Kurven $B_1 \to T$ und $B_2 \to T$, deren Faserprodukt das Albanese-Bild von X ist. Die Fasern von $X \to B_1 \times_T B_2$ sind generisch Überlagerungen und daher generisch flach, da das Bild glatt ist. Da $X \to T$ glatt ist, ist $X \to B_1 \times_T B_2$ generisch flach und der generische Grad der Abbildung unabhängig von der Faser. Nach Bemerkung 3.1.2 ist in der Faser über $t \in T$ die Abbildung $X_t \to ((C_1)_t \times (C_2)_t)/G_t$ birational und $(B_1)_t \times (B_2)_t \cong (C_1)_t/G_t \times (C_2)_t/G_t$. Also ist der generische Grad der Albanese-Abbildung bei einer isotrivialen Fläche gleich der Ordnung von G_t.
Um zu zeigen, dass die Monodromiegruppe bereits im einfachsten Fall von 4 Elementen nicht deformationsinvariant ist, benutzen wir eine Beschreibung der isotrivialen Fläche als abelsche Überlagerung.
Wir fixieren $Y = B_1 \times B_2$, wobei B_i Kurven vom Geschlecht ≥ 2 sind, und nennen p_i die Projektion auf B_i. Sei $L = p_1^* L_1 \otimes p_2^* L_2 \in \mathrm{Pic}^d(Y)$ und $s \in \Gamma(Y, L^4)$ ein Schnitt, dessen Verschwindungslokus aus horizontalen und vertikalen Komponenten besteht. Es ist also $s = s^1 \times s^2$ mit $s^i \in \Gamma(B_i, L_i^4)$ und wie in Abschnitt A.2 konstruiert man die G-Überlagerung zu $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ mit den reduzierten Baudaten $(L, \mathrm{div}(s))$ im Totalraum $\mathbb{V}(L^4)$ des Geradenbündels L^4

$$X_G = V(w_1^4 - s) \subset \mathbb{V}(L^4),$$

wobei w_1 eine lokale Koordinate von L und V der Verschwindungslokus der Gleichung ist. Die Fläche X_G ist isomorph zu $(C_1 \times C_2)/G$, wobei C_i die G-Überlagerung von B_i mit den Baudaten L_i und s^i ist. Da die Singularitäten von X_G höchstens vom Typ A_3 sind und X_G aufgrund der Geschlechtsvoraussetzung an B_i keine rationalen Kurven enthält, ist also X_G bereits das kanonische Modell dieser isotrivialen Fläche.
Basteln wir nun eine $G' = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$-Überlagerung von Y, die sich nach X_G deformieren lässt. Wir fixieren dazu Erzeuger a, b von G' und verwenden

als reduzierte Baudaten der Überlagerung $L_a = L^2$, $L_b = L$ sowie Schnitte $s_a \in \Gamma(Y, L_a^2)$ und $s_b \in \Gamma(Y, L_b^2)$. Mit den Vokabeln aus Abschnitt A.2 ist $I = \{(\langle a\rangle, \chi_a), (\langle b\rangle, \chi_b)\}$ und die Überlagerung einfach. Wählt man die Schnitte speziell von der Form $s_a = s_a^1 \otimes s_a^2$ und $s_b = s_b^1 \otimes s_b^2$, so ist die zugehörige Überlagerung X' über B_1 isotrivial. Sind die Nullstellen von s_a^1 und s_b^1 bzw. von s_a^2 und s_b^2 disjunkt, so hat

$$X_{G'} = V(w_a^2 - s_a, w_b^2 - s_b) \subset \mathbb{V}(L^4) \oplus \mathbb{V}(L^2)$$

nur A_1-Singularitäten, ist also bereits das kanonische Modell dieser Fläche. Um X_G in $X_{G'}$ zu deformieren, basteln wir eine Hilfsfläche X_1. Gehen wir einmal davon aus, dass es $s_2 \in \Gamma(Y, L^2)$ und $s_4 \in \Gamma(Y, L^4)$ gibt, sodass sowohl $\mathrm{div}(s_2)$ als auch $\mathrm{div}(s_4)$ glatt sind, sich nur normal überkreuzen und auch $\mathrm{div}(s_4 + s_2^2/4)$ glatt ist. Dann ist

$$X_1 = V(w_2^2 - s_2 w_2 - s_4, w_1^2 - w_2) \subset \mathbb{V}(L^4) \oplus \mathbb{V}(L^2)$$

das kanonische Modell einer Fläche vom allgemeinen Typ:
Der Quotient von X_1 nach $w_1 \mapsto -w_1$ ist eine 2-blättrige Überlagerung von Y, die über $\mathrm{div}(s_4 + s_2^2/4)$ verzweigt und nach Voraussetzung an diesen Schnitt glatt ist. Und die Überlagerung $X_1 \to X_1/\pm w_1$ verzweigt genau über $w_2 = 0$. Dieser Divisor hat, wie der Schnitt von $\mathrm{div}(s_2)$ und $\mathrm{div}(s_4)$, nur normale Überkreuzungen. X_1 hat also nur A_1-Singularitäten und wir haben die Behauptung 'kanonisches Modell' verifiziert.
Daraus erhalten wir eine natürliche Deformation von X_G, also nach Satz A.2.5 eine flache Familie, in der X_G und $X_0 = V(w_1^4 - s_4) \subset \mathbb{V}(L^4)$ vorkommt. Bezeichnet t eine lokale Koordinate in $\mathbb{A}^1$, so ist analog

$$\mathcal{X} = V(w_1^4 - t s_2 w^2 - s_4) \subset \mathbb{V}(L^4) \times \mathbb{A}^1$$

eine natürliche Deformation von $\mathcal{X}_\prime = X_0$, also flach und $X_1 = \mathcal{X}_1$.
Wählt man auf $\mathbb{V}(L^2)$ die Koordinate $w_a = w_2 - s_2/2$ und benennt w_1 in w_b um, so ist

$$X_1 \cong V(w_a^2 - (s_4 + s_2^2/4), w_b^2 - w_a - s_2/2) \subset \mathbb{V}(L^4) \oplus \mathbb{V}(L^2).$$

Man deformiere also zunächst s_a in $(s_4 + s_2^2/4)$ und verwende dann

$$\mathcal{X}' = V(w_a^2 - (s_4 + s_2^2/4), w_b^2 - t w_a - s_2/2)) \subset \mathbb{V}(L^4) \oplus \mathbb{V}(L^2) \times \mathbb{A}^1.$$

Dabei ist wiederum t eine lokale Koordinate im $\mathbb{A}^1$ und $\mathcal{X}'$ als natürliche Deformation von $X_1 = \mathcal{X}'_1$ eine flache Familie. Da $\mathcal{X}'_0 \cong X_{G'}$, deformieren die Familien zusammen X_G in $X_{G'}$.
Schließlich ist zu zeigen, dass die Wünsche an s_2 und s_4 in Erfüllung gehen: Dies liefert der Satz von Bertini, wenn man den Grad von L_1 und L_2 genügend groß wählt, sodass die Vektorräume der Schnitte genügend hohe Dimension haben. $\square$

Bemerkung 3.2.4. Schränkt man sich auf Deformationen einer isotrivialen Fläche ein, die nichts an der Isotrivialität ändern, so erhält man für dieses Unterschema einer Komponente des Modulraums mit den Methoden von [Cat00] §5 und des folgenden Abschnitts ein Analogon zu Satz 3.3.3. Wir wollen darauf nicht näher eingehen sondern uns stattdessen auf das einfachste G beschränken und den ganzen zugehörigen Modulraum untersuchen.

In dem speziellen Fall $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ liefert die Deformationstheorie von abelschen Überlagerungen nach Pardini/Fantechi ([FaPa97]) und Manetti ([Ma98]) mehr Strukturaussagen über die betreffenden Komponenten des Modulraums. Ähnliche Aussagen könnte man auch noch für $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ machen, wenn man ziemlich restriktive Forderungen an den Verzweigungsdivisor stellt, die erzwingen, dass alle Deformationen natürlich im Sinne von Definition A.2.5 und sogar galoissch sind. Da die folgenden Untersuchungen eher exemplarischen Charakter haben, werden wir darauf nicht eingehen.

Wir setzen im Rest dieses Abschnitts voraus, dass für eine (und damit alle) Flächen einer Zusammenhangskomponente des Modulraums (BV) und (sFV) gilt und wir beschränken uns auf den Fall $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Wir bezeichnen die untersuchte Komponente des Modulraums mit N_2 und den zugehörigen Unterfunktor mit $\mathfrak{S}_2$. Wir schließen außerdem den Fall aus, dass die Flächen in $\mathfrak{S}_2$ produktisogen sind (siehe dazu folgenden Abschnitt).

Die Flächen in solch einer Komponente des Modulraums lassen sich als zweiblättrige Überlagerung charakterisieren. Dazu benötigt man den Begriff der 'einfachen Kurvensingularität', siehe [BPV84] Abschnitt II.5.

Satz 3.2.5. *Die Flächen in $\mathfrak{S}_2(\mathbb{C})$ sind zweiblättrige Überlagerungen eines Produkts von Kurven, verzweigt über einer Kurve mit höchstens einfachen*

Singularitäten.
Eine allgemeine Fläche in $\mathfrak{S}_2(\mathbb{C})$ ist glatt, d.h. genauer: zu $X_0 \in \mathfrak{S}_2(\mathbb{C})$ gibt es eine Familie $X \to T \in \mathfrak{S}_2(T)$, sodass X_0 die spezielle Faser über $0 \in T$ ist und alle anderen Fasern glatte Flächen sind.

Beweis: Sei $X \in \mathfrak{S}_2(\operatorname{Spec} k)$. Die Stein-Faktorisierung $X \to X' \to Y = \eta(X)$ entlarvt X' nach Korollar 3.2.2 als zweiblättrige Überlagerung von Y mit den Baudaten L und D. Solange D nur einfache Singularitäten hat, besitzt X' nach [BPV84] Th. II.5.1 nur rationale Doppelpunkte, stimmt also mit X überein. Diese Bedingung an D ist eine offene, also ist das Bild des Funktors

$$\mathfrak{S}_2^0(T) = \{X \to T \in \mathfrak{S}_2(T) | X \to \eta(X) \text{ ist 2:1 -Überlagerung}\}$$

in N_2 offen. Bleibt zu zeigen, dass es auch abgeschlossen ist. Sei dazu $X \to T \in \mathfrak{S}_2(T)$ derart, dass die Einschränkung auf $T^* = T \setminus 0$ in $\mathfrak{S}_2^0(T^*)$ liegt. Durch einen étalen Basiswechsel können wir nach [Ar74] auch annehmen, dass X eine simultane Singularitätenauflösung zulässt. Nach Voraussetzung besitzt $X|_{T^*}$ eine Involution τ, deren Quotientenabbildung gerade die Albanese-Abbildung ist. Da der kanonische Divisor auf den Fasern von X ampel ist, kann man ([FaPa97] Prop. 4.4) anwenden und τ nach ganz X ausdehnen. Die dort gemachte Voraussetzung, dass X_t für $t \in T^*$ glatt ist kann man durch obige Auflösungsbedingung ersetzen.
Nach [Ma97] Th. 4.1 ist faserweise, d.h. für alle $t \in T$ die Quotientenabbildung $X_t \to X_t/\tau$ flach und damit auch die Familie $X/\tau \to T$. Die Fasern dieser Familie haben höchstens rationale Doppelpunkte und die relative Albanese-Abbildung faktorisiert über X/τ. Also stimmen beide überein, X/τ ist in Wirklichkeit glatt und der Verzweigungsdivisor wie gefordert.

Die zweite Aussage folgt schließlich aus dem Satz von Bertini, da der generische Divisor in $|L^2|$ glatt ist. Dabei wird verwendet, dass L^2 ampel ist. Dies ist ein Spezialfall des folgenden Lemmas, wenn man beachtet, dass L^2 effektive Divisoren enthält und dass $\deg L_i = 0$ für $i = 1$ oder $i = 2$ eine produktisogene Fläche implizieren würde. □

Für die Baudaten der zweiblättrigen Überlagerung $X \to \eta(X) = B_1 \times B_2 =: Y$ gilt weiter:

Lemma 3.2.6. *Besitzt $X \to T$ einen Schnitt, so gibt es zwei Geradenbündel $\mathcal{L}_i$ auf $B_i \to T$ $(i = 1, 2)$, sodass $\mathcal{L} = p_1^*\mathcal{L}_1 \otimes p_2^*\mathcal{L}_2$.*

Beweis: Aufgrund des Schnittes ist

$$\mathrm{Pic}(B_1 \times B_2) \cong \mathrm{Pic}(B_1) \times \mathrm{Pic}(B_2) \times \mathrm{Corr}(B_1, B_2),$$

wobei $\mathrm{Corr}(B_1, B_2)$ der Funktor der divisorialen Korrespondenzen ist. Nach Konstruktion ist $\mathcal{L}^2 = \mathcal{O}_Y(D) = p_1^*\mathcal{O}_{B_1}(D_1) \otimes p_2^*\mathcal{O}_{B_2}(D_2)$. Weiter ist

$$\mathrm{Corr}(B_1, B_2) = \mathrm{Hom_s(B_1, Pic(B_2))},$$

wobei der Index s für schnitttreu steht, ein fester Punkt von B_1 also auf Null abgebildet wird. Daran erkennt man, dass $\mathrm{Corr}(B_1, B_2)$ keine nichttrivialen nilpotenten Elemente enthält. □

Der grobe Modulraum für Flächen in $\mathfrak{S}_2$ kann also nach einer endlichen Überlagerung zur Sicherstellung des Schnittes durch den Modulraum für Quadrupel

$$Q(T) = \{(Y/T, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, s)\}$$

beschrieben werden, wobei

$$Y \in \mathfrak{C}_{b_1}(T) \times \mathfrak{C}_{b_2}(T), \mathcal{L}_i \in \mathrm{Pic}_{\mathcal{B}_i/T}, s \in \Gamma(Y, p_1^*\mathcal{L}_1 \otimes p_2^*\mathcal{L}_2).$$

Denn umgekehrt definiert so ein Quadrupel eine Familie von kanonischen Modellen durch die explizite Konstruktion der Überlagerung, wie in Abschnitt A.2 erläutert. Und für die folgende Untersuchung von Zusammenhangskomponenten und Dimension stört die endliche Überlagerung nicht.

Für große d_i erhält man direkt eine weitere Strukturaussage:

Korollar 3.2.7. *Ist $\deg D_i > 2b_i - 2$ (oder äquivalent: ist $D - K_Y$ ampel), so liegen isotriviale Flächen (mit Monodromiegruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) genau dann in der gleichen Zusammenhangskomponente N_2 des Modulraums für Flächen vom allgemeinen Typ, wenn die Invarianten b_i und $d_i = \deg L_i$ für $i = 1, 2$ übereinstimmen. Eine solche Zusammenhangskomponente des Modulraums ist irreduzibel und hat die Dimension*

$$\dim N_2 = 4b_1 + 4b_2 - 7 + h^0(Y, O_Y(D)).$$

Beweis: Es sei $M_{b_i}(d_i)$ der grobe Modulraum für Geradenbündel vom Grad d_i auf einer Kurve vom Geschlecht b_i. Dieser ist irreduzibel. Die Fasern der natürlichen Projektionen $N_2 \to M_{b_1}(d_1) \times M_{b_2}(d_1)$ sind unter der gegebenen Gradvoraussetzung alle $(h^0(Y, O_Y(D)) - 1)$–dimensional und Zusammenzählen der Dimensionen ergibt die Behauptung. □

Falls die Grade nicht so hoch sind, hilft die Deformationstheorie, den Modulraum mit ähnlichen Methoden wie bei Seiler ([Sei82], [Sei95]) etwas näher zu beschreiben.

Satz 3.2.8. *Jedes Quadrupel (Y, L_1, L_2, s) besitzt eine universelle Deformation, die zugleich universelle Deformation jeder ihrer Fasern ist.*

Beweis: Sei $\mathcal{Y} = \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \to M^{[n]}$ die universelle Familie über dem feinen Modulraum für Produkte von glatten Kurven von Geschlecht b_1 und b_2 mit Level-n-Struktur. Sei $L = p_1^* L_1 \otimes p_2^* L_2$ und $P = \underline{\mathrm{Pic}}^L_{\mathcal{Y}/M^{[n]}}$ die Komponente des relativen Picardschemas, die auf Y eingeschränkt die Garbe L enthält und $\mathcal{P}$ die Poincaré-Garbe auf P. $(\mathcal{Y} \times_{M^{[n]}} P \to P, \mathcal{P})$ ist eine universelle Deformation von $(B_1 \times B_2, L)$ und auch von jeder Faser $(\mathcal{Y}_p, \mathcal{P}_p)$ für $p \in P$. Wir müssen noch den Schnitt s berücksichtigen, der D in L^2 definiert. Nach ([EGA] III Th. 7.7.6) und ([EGA] I Prop. 9.4.9) gibt es ein Schema $F = \operatorname{Spec} \mathbf{S}(\mathcal{E})$ für einen $\mathcal{O}_P$-Modul $\mathcal{E}$, das den Funktor

$$T \mapsto \{(\mathcal{Y}, \mathcal{L}, s) | \mathcal{Y}, \mathcal{L} \in h_P(T), s \in \Gamma(\mathcal{Y}, \mathcal{L})\}$$

darstellt. Dabei bezeichnet h_P den Punktfunktor des Schemas P. Über F lebt die zugehörige universelle Familie, deren Einschränkung auf das offene Unterschema F', über dem s einen Divisor mit einfachen Singularitäten ausschneidet, wir mit $(\mathcal{Y}'/F', \mathcal{L}', s')$ bezeichnen. Diese Familie induziert zwar jede Deformation, hat aber noch nichttriviale Automorphismen, denn jedes Vielfache von s' induziert dieselbe Überlagerung. Da jede Fläche $\mathcal{Y}_t$ nur endlich viele Automorphismen hat, ist die Zusammenhangskomponente von $\mathrm{Aut}(\mathcal{Y}', \mathcal{L}', s')$ aber gerade $\mathbb{G}_m$. Man beschafft sich nun lokal wie in [Sei82] Satz 4.1 Scheiben dieser Aktion und zieht die Familie darauf zurück. □

Hinsichtlich der Frage nach Zusammenhangskomponenten können wir mit diesen Bezeichnungen obiges Korollar wie folgt verschärfen:

Theorem 3.2.9. *Zwei isotrivial gefaserte Flächen mit Monodromiegruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ liegen genau dann in der gleichen Zusammenhangskomponente des Modulraums für Flächen vom allgemeinen Typ, wenn die Invarianten b_i und d_i übereinstimmen.*

Beweis: Die Bedingungen sind nach Satz 3.2.5 offensichtlich notwendig. Wir benennen die natürlichen Morphismen zwischen in obigem Beweis eingeführten Schemata mit $f : F \to P$ und $g : P \to M^{[n]}$. Die Fasern von f

sind isomorph zu $H^0(C_1, L_1) \otimes H^0(C_2, L_2)$ für die dem Bildpunkt entsprechenden Kurven und Bündel. Ist dieser Vektorraum nichtnull, so liegt F' darin sogar dicht. Zunächst zeigen wir, dass $f(F')$ zusammenhängend ist: Die Punkte von $f(F')$ korrespondieren mit Paaren (C_1, C_2) von Kurven zusammen mit Geradenbündeln L_i auf C_i, sodass $H^0(C_1 \times C_2, p_1^* L_1 \otimes p_2^* L_2)$ nichtnull ist. $f(F')$ wird durch g eigentlich und surjektiv auf das zusammenhängende $M^{[n]}$ abgebildet. Die Faser von g über $C_1 \times C_2$ ist gerade $W^0_{d_1}(C_1) \times W^0_{d_2}(C_2)$ (Definition siehe [ACGH85]), also nach [ACGH85] Theorem V.1.4 zusammenhängend. Die Zwischenbehauptung folgt also aus topologischen Gründen.

Angenommen F' sei disjunkte Vereinigung zweier abgeschlossener Mengen A und B. Dann müssen $\overline{f(A)}$ und $\overline{f(B)}$ einen Punkt $p \in f(F)$ gemeinsam haben. Sei ohne Einschränkung $p \in f(A)$ und daher $f^{-1}(p) \subset A$. Sei $B_0 \subset f(B)$ eine Teilmenge, über der f ein Vektorraumbündel fester Dimension ist, und sodass p immer noch im Abschluss von B_0 liegt. C, der Abschluss von $f^{-1}(B_0)$ in F, ist also ein Vektorraumbündel (positiver Dimension), dessen Bild p enthält. $C \cap F'$ ist dicht in jeder Faser von $f|_C$, wie bereits oben bemerkt, und $C \cap B$ ist dicht in C. Daraus folgt, dass $f^{-1}(p) \cap B \neq \emptyset$ und der gesuchte Widerspruch. $\square$

Für weitere Dimensionsaussagen spezialisieren wir nun die Resultate aus Abschnitt A.2 auf unsere Situation und erinnern daran, dass $T_Y \cong p_1^* T_{B_1} \oplus p_2^* T_{B_2}$ ist und dass nach Künneth (z.B. [Mil80] Cor. 8.13) für lokalfreie O_{B_k}-Moduln $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ gilt:

$$\sum_{r+s=m} H^r(B_1, \mathcal{F}_1) \otimes H^s(B_2, \mathcal{F}_2) \cong H^m(Y, p_1^* \mathcal{F}_1 \otimes p_2^* \mathcal{F}_2)$$

Korollar 3.2.10. *Mit den Bezeichnungen aus Abschnitt A.2 gilt:*
$\alpha : \mathrm{Dnat}_X \to \mathrm{Def}_X$ *ist ein Isomorphismus prodarstellbarer Funktoren.*

Beweis: Dies folgt direkt aus Satz 3.2.5 oder mit dem Kriterium von Satz A.2.9: $H^1(Y, L^{-1})$ verschwindet nach dem Kodaira-Verschwindungssatz. Aus dem gleichen Grund verschwindet auch $H^1(Y, T_Y \otimes L^{-1})$. Die Prodarstellbarkeit von Def_X folgt aus der oben konstruierten universellen Familie für Dnat. Alternativ wird dies vom Verschwinden von $H^0(X, T_X)$ ([Wa72] Cor. zu Th. 4.1) impliziert. Dies verschwindet wiederum wegen Lemma A.2.8 als Summe von $H^0(Y, T_Y \otimes L^{-1})$ und $H^0(Y, T_Y\langle -D \rangle)$. $\square$

Zur Bestimmung von $\dim T^1\mathrm{Def}_X$ setzen wir das Bündel P_L, das Deformationen von (Y,D) beschreibt (vgl. Absatz vor A.2.7), mit den Bündeln P_i, die analog Deformationen von $(B_i, \mathcal{O}_{B_i}(D))$ beschreiben, in Verbindung. Man erhält aus der Konstruktion dieser Bündel folgendes Diagramm von $\mathcal{O}_Y$-Moduln mit exakten Zeilen:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \bigoplus_{i=1}^2 \mathcal{O}_Y \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{i=1}^2 p_i^* P_i \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{i=1}^2 p_i^* T_{B_i} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_Y \arrow[r] & P_L \arrow[r] & T_Y \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Dabei ist der senkrechte Pfeil rechts der kanonische Isomorphismus und der senkrechte Pfeil links ist die Addition. Die Morphismen $H^k(B_i, P_i) \to H^k(B_i, T_{B_i})$ sind für $i = 1,2$ und $k = 0,1$ surjektiv, für $k = 1$ aus Dimensiongründen und für $k = 0$, da das Bild verschwindet. Aus der Künnethformel erhält man für $k = 0,1$ die Exaktheit der Sequenzen

$$0 \to \oplus_{i=1}^2 H^k(Y, \mathcal{O}_Y) \to \oplus_{i=1}^2 H^k(Y, p_i^* P_i) \to H^k(Y, T_Y) \to 0 \qquad (\#).$$

Die Sequenzen

$$0 \to T_Y\langle -D\rangle \to P_L \to \mathcal{O}_Y(D) \to 0$$

und

$$0 \to \mathcal{O}_Y \to P_L \to T_Y \to 0$$

ergeben zusammen mit $H^0(Y, T_Y) = 0$ das folgende Diagramm mit exakten Zeilen und Spalten.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & \\
H^0(Y,\mathcal{O}_Y) \arrow[r, equal] \arrow[d] & H^0(Y,\mathcal{O}_Y) \arrow[d] & & H^1(Y,\mathcal{O}_Y) \arrow[r, equal] \arrow[d] & H^1(Y,\mathcal{O}_Y) \arrow[d] \\
H^0(Y,P_L) \arrow[r, hook] \arrow[d] & H^0(Y,\mathcal{O}_Y(D)) \arrow[r] \arrow[d] & T^1\mathrm{Def}_X \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^1(Y,P_L) \arrow[r, "\varphi_D^1"] \arrow[d, "\gamma_1"] & H^1(Y,\mathcal{O}_Y(D)) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & H^0(Y,\mathcal{O}_D(D)) \arrow[r] & T^1\mathrm{Def}_X \arrow[r] & H^1(Y,T_Y) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(Y,\mathcal{O}_D(D)) \\
 & & & 0 &
\end{tikzcd}$$

Die Surjektivität von γ_1 folgt aus (#) für $k = 1$ und der Tatsache, dass die Abbildung $\oplus H^1(Y, p_i^* P_i) \to H^1(Y, T_Y)$ nach obiger Leiter über γ_1 faktorisiert.

Setzt man schließlich kurz $h_i^k = \dim H^k(B_i, \mathcal{O}_{B_i}(D_i))$, so liest man aus dem Diagramm ab:

Korollar 3.2.11. *Die Dimension des Tangentialraums an den Deformationsfunktor ist*

$$\dim T^1 \mathrm{Def}_X = 4b_1 + 4b_2 - 7 + h_1^0 \cdot h_2^0 - (h_1^1 + h_2^1).$$

Die Obstruktionen von Def_X *liegen in* $H^1(Y, \mathcal{O}_Y(D))/\mathrm{Bild}(H^1(Y, P_L))$. *Dieser Raum ist* $h_1^1(h_2^0 - 1) + h_2^1(h_1^0 - 1)$*-dimensional.*

Beweis: Für die Bestimmung der Dimension von T^1 fehlt noch die Dimension des Bildes von φ_D^1. Diese stimmt mit der Dimension von

$$\mathrm{Bild}(\oplus_{i=1}^2 H^1(Y, p_i^* P_i) \to H^1(Y, T_Y))$$

überein. Die Abbildungen sind dabei induziert vom Pullback von $\varphi_{D_i}^1$ verkettet mit der Multiplikation mit einem definierenden Schnitt von D_i. Aus Dimensionsgründen ist $H^1(B_i, P_i) \to H^1(B_i, \mathcal{O}_{B_i}(D_i))$ surjektiv und die Abbildung

$$H^0(B_i, P_i) \cong H^0(B_i, \mathcal{O}_{B_i}) \to H^0(B_i, \mathcal{O}_{B_i}(D_i))$$

ist injektiv. Mit Hilfe der Künneth-Formel erkennt man, dass das Bild also $h_1^1 + h_2^1$-dimensional ist.

Es ist $O \to H^1(Y, \mathcal{O}_Y(D))/\mathrm{Bild}(H^1(Y, P_L)) \to T^2\mathrm{Def}_X \to H^2(Y, P_L)$ exakt. Das Bild ω in $H^2(Y, P_L)$ der Obstruktion zur Ausdehnung von $(Y \to T', \mathcal{L}, s)$ nach T (wobei $T = \mathrm{Spec}\, R$ eine infinitesimale Erweiterung von $T' = \mathrm{Spec}\, R/I$ ist) ist die Obstruktion zur Ausdehnung von $(Y \to T', \mathcal{L})$ nach T. Nach geeignetem étalem Basiswechsel kann man wie in Lemma 3.2.6 dies als Obstruktion von $(Y \to T', \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$ nach T interpretieren. Diese ist aus Dimensionsgründen trivial, also auch die ursprüngliche. Zusammenzählen der Dimensionen liefert dann die zweite Behauptung. □

3.3 Produktisogene Flächen vom einfachen Typ

Bevor wir Modulräume für produktisogene Flächen untersuchen, wiederholen wir zunächst die umfassende Beschreibung solcher Flächen durch

Catanese in der absoluten Situation. Technisches Kernstück im Beweis des folgenden Satzes ist die Steifheit eines Produkts von Kurven ([Cat00] Lemma 3.8): Ein surjektiver Morphismus $C_1 \times C_2 \to B_1 \times B_2$ zwischen Produkten von komplexen Kurven ist bis auf Vertauschung der Faktoren Produkt von Morphismen $C_i \to B_i$. Man beachte, dass bei produktisogenen Flächen $(C_1 \times C_2)/G$ glatt und daher der Morphismus ε aus Bemerkung 3.1.2 ein Isomorphismus ist.
Es sei Π_g die Fundamentalgruppe einer Kurve vom Geschlecht g, für spätere Zwecke versehen mit einer festen Orientierung.

Definition und Satz 3.3.1. (Catanese, [Cat00]) *Eine minimale Fläche S ist genau dann produktisogen, falls es eine Untergruppe $\Gamma \leq \pi_1(S)$ vom Index d isomorph zu $\Pi_{g_1} \times \Pi_{g_2}$ gibt, sodass $\chi(\mathcal{O}_S) = (g_1 - 1)(g_2 - 1)/d$ ist. Eine minimale Produktüberlagerung $C_1 \times C_2$ von S ist eindeutig, galoissch und die Galoisgruppe G operiert frei auf dem Produkt.*
Sei G_0 die Untergruppe von G, die die Faktoren des Produkts nicht vertauscht. S heißt vom einfachen Typ*, falls $G_0 = G$, und vom* gemischten Typ *sonst, d.h. falls $[G : G_0] = 2$ ist.*
Ist S vom einfachen Typ, so operiert G auch auf C_1 und C_2 und S hat zwei Faserungen $h_1 : S \to (C_1/G)$ und $h_2 : S \to (C_2/G)$.
Den gemischten Typ erkennt man topologisch daran, dass Π_{g_i} in $\pi_1(S)$ nicht normal ist.
Insbesondere sind die Eigenschaften „produktisogen“ sowie „einfacher Typ“ und „gemischter Typ“ deformationsinvariant.

Der Modulraum für Flächen vom gemischten Typ wurde von Catanese ([Cat00] Th. 4.14) vollständig bestimmt. Da diese Flächen zudem im Allgemeinen keine Faserungen besitzen, wenden wir uns von nun an den Flächen vom einfachen Typ zu.

Sei N_P eine Komponente des Modulraums für Flächen vom allgemeinen Typ, die produktisogene Flächen parametrisiert und den Voraussetzungen (BV) und (sFV) genügt. Weiter sei $\mathfrak{S}_P$ der zugehörige Unterfunktor.

Zunächst bemerkt man, dass unter diesen Voraussetzungen $(C_1 \times C_2)/G$ nicht nur das minimale, sondern auch das kanonische Modell der Fläche ist. Um N_P zu beschreiben, wollen wir zunächst zu einer Familie von Flächen zwei Familien von Kurven vom Geschlecht g_1 und g_2 assoziieren. Da wir nachher nur an groben Modulräumen interessiert sind, kümmern wir uns nicht darum, unter welchen Umständen man eine Familie $X \to T$ 'global' als $(C_1 \times C_2)/G$ darstellen kann.

Lemma 3.3.2. *Es gibt eine natürliche Transformation*

$$\eta_P : \mathfrak{S}_P \to h_{M_{g_1}} \times h_{M_{g_2}}$$

in die Punktfunktoren der Modulräume.

Beweis: Wie in Lemma 3.2.1 und Korollar 3.2.2 erhält man auch hier zu einer Familie $X \to T$ zwei Familien von glatten Kurven $g_i : B_i \to T$ und zwei Faserungen $h_i : X \to B_i$, jeweils für $i = 1, 2$.
Über einem offenen, dichten Teil B_i^0 von B_i, der über ganz T liegt, sind die Fasern glatte und paarweise isomorphe Kurven. Da h_i nach Lemma 2.2.1 außerdem flach ist, liefert die universelle Eigenschaft des groben Modulraums Morphismen $\tilde{m}_i : B_i^0 \to M_{g_i}$. Da $g_i : B_i \to T$ glatt ist, gibt es nach étalem Basiswechsel $T' \to T$ Schnitte $s_i : T' \to B_i \times_T T'$. Die Verkettung $m_i' = \tilde{m}_i \circ \mathrm{pr}_{B_i} \circ s'$ hängt bei produktisogenen Flächen nicht mehr von der Wahl des Schnittes ab. Also bilden diese Morphismen ein (stets effektives) Abstiegsdatum und liefern die gesuchten Morphismen $m_i : T \to M_{g_i}$. □

Bei der Untersuchung des Bildes der Morphismen m_i helfen Teichmüllerräume:

Gegeben sei nun eine produktisogene Fläche X vom einfachen Typ mit Eulercharaktistik $\chi(\mathcal{O}_X) = (g_1 - 1)(g_2 - 1)/d$, deren Fundamentalgruppe isomorph zu einer festen Gruppe Γ ist. Sei G die nach Satz 3.3.1 eindeutige minimale Faktorgruppe, deren zugehörige Überlagerung $C_1 \times C_2$ ist. Dividiert man aus $\pi_1(X)$ die normale Untergruppe $\pi_1(C_{i+1})$ (Indizes stets modulo 2 gelesen) heraus, erhält man exakte Sequenzen

$$1 \to \pi_1(C_i) \to \Gamma(i) \to G \to 1, \qquad (E_i)$$

wobei $\pi_1(X)/\pi_1(C_{i+1}) = \Gamma(i)$ gerade die Orbifold-Fundamentalgruppen $\pi_1^{orb}(C_i/G^*, m)$ sind, wie [Cat00] Prop. 4.5 zeigt. Dabei steht der Stern für die Punktierung durch die Verzweigungspunkte und m ist der Vektor der Verzweigungsordnungen. Diese Orbifold-Sichtweise werden wir aber nicht wirklich benötigen.

Fixiert man orientierungserhaltende Isomorphismen $\varphi_i : \Pi_{g_i} \to \pi_1(C_i)$, so liefern die exakten Sequenzen (E_i) Einbettungen $\mu_i : G \to \mathrm{Out}^+(\Pi_{g_i}) =$

Mod_{g_i}. Die Injektivität folgt aus der Tatsache, dass G minimal ist und daher treu auf C_i operiert. Also liegt (C_i, φ_i) in $T_{g_i}^G$, dem Fixlokus des Teichmüllerraums unter der Operation von $\mu_i(G)$. Sei $M_{g_i}^G$ das Bild dieses Fixlokus. Dieses ist unabhängig von der Wahl von φ_i. Denn ein anderer solcher Isomorphismus ergibt ein in Mod_{g_i} konjugiertes Bild von G. Das Bild hiervon im Modulraum M_{g_i} ist jedoch das gleiche, denn für $\alpha \in \mathrm{Mod}_g$ ist $T_{g_i}^{\alpha G \alpha^{-1}} = \alpha T_{g_i}^G$. Damit können wir das Hauptresultat formulieren.

Theorem 3.3.3. *Sei $\Pi_{g_1} \times \Pi_{g_2} \lhd \Gamma$ ein Normalteiler vom Index d mit Faktorgruppe G. Unter (FV) und (BV) sei $N(\Gamma)$ das Unterschema des Modulraums, das produktisogene Flächen vom einfachen Typ mit Fundamentalgruppe Γ und Eulercharakteristik $(g_1 - 1)(g_2 - 1)/d$ parametrisiert. $N(\Gamma)$ ist irreduzibel oder besteht aus 2 irreduziblen Komponenten, jeweils isomorph zu $M_{g_1}^G \times M_{g_2}^G$, falls die Erweiterungen E_1 und E_2 nicht isomorph sind, bzw. isomorph zu $(M_{g_1})^2/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ andernfalls. Dabei erhält man die Fixloki $M_{g_i}^G$ wie zuvor beschrieben.*
Der Fall zweier Komponenten kommt tatsächlich vor, indem man z.B. für C_2 eine geeignete Dreieckskurve (siehe Beweis) verwendet.

Beweis: Zunächst kümmern wir uns um die Frage, wann zwei Flächen von diesem topologischen Typ in einander deformiert werden können. Hat man noch eine weitere solche Fläche $\hat{X} = (\hat{C}_1 \times \hat{C}_2)/G$, so erhält man aus dem Isomorphismus $\psi : \pi_1(X) \to \pi_1(\hat{X})$ aus den kurzen exakten Sequenzen der Fundamentalgruppen ein kommutatives Diagramm mit vertikalen Isomorphismen

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[r] & \pi_1(C_i) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_i"] & \Gamma(i) \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\ \Pi_{g_i} \arrow[urr, "\varphi_i"] \arrow[drr] & & & & & \\ & 1 \arrow[r] & \pi_1(\hat{C}_i) \arrow[r] & \Gamma(i) \arrow[r] & G \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

Die Orientierungen der Riemannschen Flächen induzieren eine Orientierung auf $\pi_1(X)$ und $\pi_1(\hat{X})$. Je nachdem, ob ψ diese erhält oder umdreht, sind die Morphismen γ_i entweder beide orientierungserhaltend oder -umkehrend. Im ersten Fall liegt $(\hat{C}_i, \gamma_i \circ \varphi_i)$ ebenfalls in $T_{g_i}^G$. Andernfalls liefert die konjugiert komplexe Kurve $\overline{C_i}$ mit einem orientierungserhaltenden Isomorphismus $\overline{\varphi_i} : \Pi_{g_i} \to \pi_1(\overline{C_i})$ eine Einbettung $\overline{\mu_i}$. Das bedeutet, dass sowohl $(\overline{C_i}, \overline{\varphi_i})$ als auch $(\hat{C}_i, \overline{\gamma_i} \circ \overline{\varphi_i})$ in $T_{g_i}^{\overline{G}}$, dem zugehörigen Fixlokus der

induzierten Einbettung $\overline{\mu_i} : G \to \mathrm{Mod}_{g_i}$, liegen. Dabei bezeichnet $\overline{\gamma_i}$ den - jetzt orientierungserhaltenden - Isomorphismus im kommutativen Diagramm der kurzen exakten Sequenzen von $\overline{C_i}$ und $\hat{C}_i$.
Wir verwenden nun, dass $T_{g_i}^G$ für jede endliche Gruppe nichtleer und zusammenhängend ist ([Cat00] Lemma 4.11) und dass über $T_{g_i}^G$ eine universelle Familie $\mathcal{C}_i$ mit G-Aktion existiert, die auf den Fasern gerade die von μ_i induzierte ist. Also ist $(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)/G \to T_{g_1}^G \times T_{g_2}^G$ eine Familie von Flächen des untersuchten Typs. Diese Familie liefert also bei geeigneter Orientierung eine Deformation von X nach $\hat{X}$ und wir haben die Zahl solcher Komponenten auf zwei begrenzt.
Die Irreduzibilität der Komponenten folgt wie in [Cat00] daraus, dass $T_{g_i}^G$ in der Tat diffeomorph zu $\mathbb{R}^d$ für ein geeignetes d abhängig von g_i und der G-Aktion ist.
Als nächstes verifizieren wir die Bijektion auf dem Niveau der komplexen Punkte. Zwei Kurven (C, φ) und $(\hat{C}, \hat{\varphi})$ in T_g^G sind als Kurven mit G-Aktion genau dann zueinander isomorph, wenn ihre Bildpunkte in M_{g_i} übereinstimmen. Und zwei Flächen $X = (C_1 \times C_2)/G$ und $\hat{X} = (\hat{C}_1 \times \hat{C}_2)/G$ sind nach Satz 3.3.1 genau dann zueinander isomorph, wenn dies für die jeweiligen Kurven mit G-Aktion zutrifft. Damit ist gezeigt, dass die komplexen Punkte jeder Komponente des Modulraums in Bijektion zu denen von $M_{g_1}^G \times M_{g_2}^G$ stehen, falls die Erweiterungen E_1 und E_2 der Fundamentalgruppen mit G nicht zueinander isomorph sind. Andernfalls ist die Reihenfolge der Kurven nicht festgelgegt und man erhält die gesuchte Bijektion nach Herausdividieren der offensichtlichen Involution.

In Lemma 3.3.2 haben wir bereits gesehen, dass es zu jeder Familie $X \to T$ einen Morphismus $T \to M_{g_1} \times M_{g_2}$ gibt, dessen Bild nach obiger Diskussion gerade $M^G := M_{g_1}^G \times M_{g_2}^G$ ist. Zur Eigenschaft 'grober Modulraum' fehlt noch die Maximalität von M^G unter solchen Schemata. Dies ist aber klar, da die Familie $(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)/G \to T_{g_1}^G \times T_{g_2}^G$ jede Fläche vom untersuchten Typ enthält: Erfüllt F die Abbildungseigenschaft des groben Modulraums, so erhält man eine Surjektion $T_{g_1}^G \times T_{g_2}^G \to F$, die nach Konstruktion invariant unter Mod_{g_1} und Mod_{g_2} ist, die also über $M_{g_1}^G \times M_{g_2}^G$ faktorisiert. Falls die Erweiterungen isomorph sind, faktorisiert der Morphimus wegen der universellen Eigenschaft des Quotienten auch über $(M_{g_1})^2/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Wir untersuchen noch, in welchen Fällen es bei fixiertem topologischen Typ wirklich zwei Komponenten des Modulraums gibt. Ist eine Kurve $C_i \in$

$M_{g_i}^G$ zu einer Kurve $C_i' \in M_{g_i}^{\overline{G}} = \mathrm{Bild}(T_{g_i}^{\overline{G}})$ isomorph, so erhält man einen orientierungserhaltenden Isomorphismus von $\alpha : \pi_1(C_i) \to \pi_1(C_i')$. Damit sind $\overline{\varphi_i}$ und $\alpha \circ \varphi_i : \Pi_g \to \pi_1(C_i')$ orientierungerhaltende Isomorphismen, die Bilder der Einbettungen μ und $\overline{\mu}$ unter $\overline{\varphi}^{-1} \circ \alpha \circ \varphi_i \in \mathrm{Mod}_g$ konjugiert. Folglich ist $M_{g_i}^G = M_{g_i}^{\overline{G}}$. Es gibt also genau dann zwei Komponenten, wenn $M_{g_1}^G$ und $M_{g_1}^{\overline{G}}$ oder $M_{g_1}^G$ und $M_{g_2}^{\overline{G}}$ disjunkt sind.

Für das Beispiel von 2 Komponenten nimmt Catanese ([Cat01]) eine Dreieckskurve C, d.h. eine Kurve, die den $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ galoisch überlagert und über genau drei Punkten verzweigt ist, und als G die volle Automorphismengruppe der Kurve. Das zughörige M_g^G ist einpunktig und $M_g^{\overline{G}}$ besteht aus der komplex konjugierten Kurve. Ein Isomorphismus zwischen C und $\overline{C}$ müsste G-äquivariant sein, im Falle von reellenVerzweigungspunkten auf dem $\mathbb{P}^1$ also über der komplexen Konjugation liegen. Bei geeigneter Wahl der Gruppe kann man dies ausschließen. $\square$

Bemerkung 3.3.4. Als Spezialfall hiervon mit $\chi(\mathcal{O}_X) = (g-1)(b-1)$ erhält man Modulräume für Faserbündel. In diesem Fall operiert G auf sagen wir dem ersten Faktor frei und infolgedessen ist $M_{g_1}^G \cong M_b$, wobei $(g_1 - 1) = |G|(b-1)$.

Kapitel 4

Modulräume für irregulär gefaserte Flächen

In diesem Kapitel wollen wir Modulräume für nicht isotriviale, irregulär gefaserte Flächen untersuchen. Wir behalten dabei stets (BV) und (FV) bei und stützen uns dabei auf die technischen Resultate aus Kapitel 2 und Abschnitt 1.3, insbesondere im ersten Abschnitt. In diesem Abschnitt werden, als wesentliches Hilfmittel für die Untersuchung der gefaserten Flächen, Modulräume für abelsche Varietäten mit Morphismus auf eine feste abelsche Varietät konstruiert. Grobe Modulräume dieser Art lassen sich unter viel geringeren Restriktionen an die Zielvarietät basteln. Für die Anwendungen bei Modulräumen von Flächen benötigen wir jedoch feine Modulräume. Und um die (sowieso schon recht technische) Konstruktion nicht noch komplizierter zu gestalten, beschränken wir uns auf die benötigten Fälle.
Im zweiten Abschnitt verwenden wir diese Resultate um, zunächst punktweise, maximal irreguläre Flächen zu untersuchen, das heißt ihre singulären Fasern und Invarianten zu bestimmen. Die Resultate hängen dabei stark vom Fasergeschlecht ab: Für $g = 2$ wusste bereits Xiao ([Xi85]) sozusagen alles, für $g = 3$ können wir, trotz einiger Schwierigkeiten aufgrund von Torelli 'alles' bestimmen. Für größere g, d.h. $g = 4$ und evtl. $g = 5$ und $g = 6$ kommt das Schottky-Problem hinzu. Noch größere g verbietet der Satz 2.1.3.
Im dritten Abschnitt werden die Modulräume für maximal irreguläre Faserungen durch Modulräume für abelsche Varietäten und 'Hurwitz-Schemata' beschrieben.

4.1 Modulräume für abelsche Varietäten mit Morphismus auf eine feste abelsche Varietät

Ziel dieses Abschnitts ist die (komplex-analytische) Konstruktion eines feinen Modulraums für abelsche Varietäten vom Typ (A, d) (vgl. Bem. 1.3.6), wobei A die Dimension $g-1$ haben soll. Dies verallgemeinert eine Konstruktion von Xiao ([Xi85] Kap. 3) und wird im nächsten Abschnitt zur Konstruktion von Prototypen von gefaserten Flächen herangezogen.

Bezeichnung 4.1.1. *Sei J eine prinzipalpolarisierte abelsche Varietät der Dimension g und $p: J \to A$ eine Surjektion auf eine abelsche Varietät der Dimension $g-1$. Sei $V = H^0(J, \Omega_J)$ und $U = H_1(J, \mathbb{Z})$ das Gitter in V, sodass $J = V/U$ ist. Analog stellen wir $A = V_A/U_A$ als Quotient dar. Sei*

$$E(\cdot, \cdot) : U \times U \to \mathbb{Z}$$

die zur Prinzipalpolarisierung gehörige nicht-entartete alternierende Form. Der Morphismus p induziert eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $V \to V_A$. Sei V_2 der Kern dieser Abbildung und V_1 das bzgl. $E(\cdot, \cdot)$ orthogonale Komplement. Diese Bezeichnung ist gerechtfertigt, da wegen $E(ix, x) > 0$ gilt $V_1 \cap V_2 = 0$ und die Form nicht ausgeartet ist. Sei weiter $U_i := U \cap V_i$ sowie $A_1 := V_1/U_1$ und $A_2 := V_2/U_2$. Damit erreicht man folgende Zerlegung von J bis auf eine Isogenie i,

$$\begin{tikzcd} A_1 \times A_2 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "pr_1"] & J \arrow[d, "p"] \\ A_1 \arrow[r, "i'"] & A \end{tikzcd}$$

die von der Inklusion $U' = U_1 \oplus U_2 \hookrightarrow U$ induziert wird.

Satz 4.1.2. *In obiger Situation existiert ein $d \in \mathbb{N}$, nur abhängig von dem Morphismus p und der Prinzipalpolarisierung, sowie eine sogenannte* Homologiebasis

$$B = \{u_1, \ldots, u_g, u_{g+1}, \ldots, u_{2g-2}, u_{2g+1}, u_{2g+2}\}$$

von U, d.h. eine Basis, sodass

$$u_1, \ldots u_{g-1}, u_{g+1}, \ldots, u_{2g-1} = du_{2g+1} - u_g$$

eine symplektische Basis von U_1 und

$$u_g, u_{2g} = du_{2g+2} - u_{g-1}$$

eine symplektische Basis von U_2 ist.

Bemerkung: Die auf den ersten Blick merkwürdig anmutenden Bezeichnungen der Basiselemente sind so gewählt, dass u_1 bis u_{2g} eine symplektische Basis von $A_1 \times A_2$ vom Typ $(1, ..., 1, d, d)$ bilden.
Die Rechtfertigung dafür, obige natürliche Zahl d zu nennen und damit mit dem assoziierten Grad gleichzustellen, folgt im Anschluss an Lemma 4.1.7.

Der Beweis des Satzes verwendet mehrere Lemmata:

Lemma 4.1.3. *Sei $p_i : V \to V_i$ die Orthogonalprojektion längs V_{i+1} (bzw. V_{i-1}) und $\underline{U_i} = p_i(U)$. Dann existieren $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$, sodass*

$$G := U/U' \cong \underline{U_i}/U_i \cong \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/d_2\mathbb{Z}$$

Beweis: Die Projektion $p_1 : U \to \underline{U_1}$ induziert eine Surjektion $\overline{p_1} : U/U' \to \underline{U_1}/U_1$. Ist $\overline{x} = \overline{(x_1, x_2)} \in \operatorname{Ker} \overline{p_1}$, so ist $x_1 \in U_1$ und $\overline{x} = \overline{(0, x_2)}$. Aber $(0, x_2) \in U \cap V_2 = U_2$ und somit $\overline{x} = \overline{0}$. $\square$

Lemma 4.1.4. *Ist $x \in U_2$ derart, dass $qx \in \underline{U_2}$ für $q \in \mathbb{Q}$ bereits $q \in \mathbb{Z}$ impliziert, so gibt es $y \in U_2$ mit $E(x, y) = 1$.*

Beweis: Die alternierende Form liefert eine wohldefinierte Abbildung $\underline{U_2} \to U_2^*$, da $E(\cdot, \cdot)$ auf $U \times U$ ganzzahlig ist. Diese ist injektiv, da U_1 und U_2 bezüglich E orthogonal sind. Für die Surjektivität beachte man, dass U_2 als Schnitt von U mit einem Untervektorraum ein Komplement besitzt. Zu gegebenem $\phi \in U_2^*$ existiert eine Fortsetzung Φ auf U^*. Da $E(\cdot, \cdot)$ auf U prinzipal ist, existiert $u \in U$ mit $E(u, \cdot) = \Phi$. Nun ist $p_2(u)$ das gesuchte Urbild.
Sei $\{e_1, \ldots, e_{2r}\}$ eine Basis von U_2 und $\phi := E(u, \cdot) = \sum_{i=1}^{2r} a_i e_i^*$. Falls nun $q\phi \in U_2^*$, so ist $qx \in \underline{U_2}$ und nach Voraussetzung $q \in \mathbb{Z}$. Also ist $\operatorname{ggT}(a_1, \ldots, a_r) = 1$ und für $b_i \in \mathbb{Z}$ mit $\sum b_i a_i = 1$ leistet $y := \sum b_i e_i$ das Verlangte. $\square$

Lemma 4.1.5. *Es gibt eine symplektische Basis*

$$\{u_1, \ldots, u_{g-1}, u_{g+1}, \ldots, u_{2g-1}\}$$

von U_1, sodass eine Basis von $\underline{U_1}$ durch

$$\{u_1, \ldots, u_{g-2}, \frac{1}{d_1}u_{g-1}, u_{g+1}, \ldots, u_{2g-2}, \frac{1}{d_2}u_{2g-1}\}$$

gegeben ist.

Beweis: Nach dem ersten Lemma gibt es Elemente $x, y \in U_2$, sodass $\frac{1}{d_1}x$ und $\frac{1}{d_2}y$ die Faktorgruppe $\underline{U_2}/U_2$ erzeugen.
Gesucht ist nun eine bzgl. E orthogonale Zerlegung $U_1 = W^1 \oplus U_1^1$, wobei W^1 von zwei Elementen a, b mit $E(a, b) = 1$ erzeugt wird, sodass $\underline{U_1} = W^1 \oplus \underline{U_1^1}$. Um sukzessive solche W^i abspalten zu können, solange $\mathrm{rang}_{\mathbb{Z}} U_2^i > 2$ ist, brauchen wir zudem zwei Elemente $x', y' \in U_1^1$, sodass $\underline{U_1^1}/U_1^1$ von $\frac{1}{d_1}x'$ und $\frac{1}{d_2}y'$ erzeugt wird.
Ergänzt man x, y zu einer Basis $B = \{u_1, \ldots, u_{2g-4}, x, y\}$ von U_1, so erfüllt z.B. u_1 die Bedingung des vorangehenden Lemmas, also existiert ein Element u_{g+1} mit $E(u_1, u_{g+1}) = 1$, das wir ohne Einschränkung aus B nehmen können, wie die Bezeichung bereits suggeriert. Sei $W^1 = \langle u_1, u_{g+1}\rangle$ und $U_1^1 = (W^1)^\perp$. Dann sind

$$\tilde{x} := x - E(x, u_1)u_{g+1} - E(x, u_{g+1})u_1 \in U_1^1$$

sowie

$$\tilde{y} := y - E(y, u_2)u_{g+1} - E(y, u_{g+1})u_1 \in U_1^1.$$

Ist x_V ein Urbild in V von $\frac{1}{d_1}x$ unter p_1, so ist $E(\frac{1}{d_1}x, u) = E(x_V, u) \in \mathbb{Z}$ für alle $u \in U_1$, also ist $E(x, u) \in d_1\mathbb{Z}$. Analog liegt $E(y, u) \in d_2\mathbb{Z}$ und folglich sind

$$\frac{1}{d_1}(x - \tilde{x}), \frac{1}{d_2}(y - \tilde{y}) \in U_1.$$

Also zerfällt $\underline{U_1}$ in die direkte orthogonale Summe von W^1 und

$$\underline{U_1^1} = U_1^1 + \langle \frac{1}{d_1}\tilde{x}, \frac{1}{d_2}\tilde{y}\rangle.$$

Fasst man nun noch U_1^1 als Untermodul von $\underline{U_1^1}$ auf, so liefert der Elementarteilersatz die gewünschten Basiselemente x' und y'. $\square$

Seien $w_{g-1} := \frac{1}{d_1}u_{g-1} + u'$ und $w_{2g-1} := \frac{1}{d_2}u_{2g-1} + u''$ Urbilder der Erzeuger von $\underline{U_1}/U_1$ unter p_1. Dabei ist au' genau dann in U_2, wenn $\frac{a}{d_1}u_g$ in U_1 liegt, und dies ist genau dann der Fall, wenn $d_1 \mid a$. Analoges gilt für u''. Also gibt es $n', n'' \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(n', d_1) = \mathrm{ggT}(n'', d_2) = 1$ und $u_g, u_{2g} \in U_2$, sodass $u' = \frac{n'}{d_1}u_{2g}$ und $u'' = \frac{n''}{d_2}u_g$. Man kann zudem annehmen, dass $\{u_g, u_{2g}\}$ eine symplektische Basis von U_2 ist, indem man gegebenenfalls u_g durch $-u_g$ ersetzt.
Wählt man $m'n' \equiv 1 \mod d_1 \quad (1 \leq m' \leq d_1)$ und $m'' \equiv n'' \mod d_2 \quad (1 \leq m'' \leq d_2)$, so liegen

$$u_{2g+1} = \frac{1}{d_2}(u_{2g-1} + m''u_g) = w_{2g-1} + \frac{m'' - n''}{d_2}u_g$$

und

$$u_{2g+2} = \frac{1}{d_1}(m'u_{g-1} + u_{2g}) = m'w_{g-1} + \frac{1 - m'n'}{d_1}u_{2g}$$

in U. $\{u_1, \ldots, u_{2g+2}\}$ erzeugen also U und wegen $u_{2g} = d_1u_{2g+2} - m'u_{g-1}$ und $u_{2g-1} = d_2u_{2g+1} - m''u_g$ bilden $\{u_1, \ldots, u_{2g-2}, u_{2g+1}, u_{2g+2}\}$ eine Basis von U.

Lemma 4.1.6. *Aufgrund der Prinzipalpolarisierung von J ist $d_1 = d_2 =: d$ und $m' = m'' =: m$.*

Beweis: Sei $a = E(u_{g-1}, u_{2g-1})$ und $b := E(u_g, u_{2g})$. Aufgrund der Prinzipalpolarisierung ist $E(u_i, u_{g+i}) = 1$ für $i = 1, \ldots, g-2$. Die Determinante der Darstellungsmatrix von E eingeschränkt auf U' ist also gleich $ab = \deg(U/U') = d_1d_2$. Wegen der Linearität der alternierenden Form sind folgende Produkte ganzzahlig:

$$\begin{array}{ll} E(u_{2g+1}, u_{2g}) = bm''/d_2 \in \mathbb{Z}, & E(u_{g-1}, u_{2g+1}) = a/d_2 \in \mathbb{Z} \\ E(u_g, u_{2g+2}) = b/d_1 \in \mathbb{Z}, & E(u_{2g+2}, u_{g-1}) = am'/d_1 \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

Nach Wahl von m' und m'' ist $\mathrm{ggT}(m', d_1) = \mathrm{ggT}(m'', d_2) = 1$ und daher gilt $d_1 \mid b$, $d_1 \mid a$, $d_2 \mid b$ sowie $d_2 \mid a$. Also bleibt nur $d_1 = d_2 = a = b$. Schließlich ist noch $E(u_{2g+1}, u_{2g+2}) = (m' - m'')/d \in \mathbb{Z}$, woraus die zweite Behauptung folgt. □

Zum Beweis des Satzes fehlt dann nur noch:

Lemma 4.1.7. *Durch einen Basiswechsel in U_2 kann man $m = 1$ erreichen.*

Beweis: Wegen $\operatorname{ggT}(m,d) = 1$ existieren $a, b \in \mathbb{Z}$, sodass $am - bd^2 = 1$. Damit ist $\{u'_g = mu_g + bdu_{2g}, u'_{2g} = du_g + au_{2g}\}$ ebenfalls eine symplektische Basis von U_2. Ersetzt man u_{2g+1} und u_{2g+2} durch

$$u'_{2g+1} := \frac{1}{d}(u'_g + u_{2g-1}) = u_{2g+1} + bu_{2g} \in U$$

bzw.

$$u'_{2g+2} := \frac{1}{d}(u'_{2g} + u_{g-1}) = au_{2g+2} + u_g + \frac{1-am}{d}u_{g-1} \in U,$$

so ist wegen $u_{2g+2} = mu'_{2g+2} - mu'_{2g} + u_g$ die gesuchte Homologiebasis durch

$$\{u_1, \ldots, u_{g-1}, u'_g, u_{g+1}, \ldots, u_{2g-2}, u'_{2g+1}, u'_{2g+2}\}$$

gegeben. □

Bezüglich der Basis $\{u_1, \ldots, u_{g-1}, u_{g+1}, \ldots, u_{2g-1}\}$ hat also die Einschränkung der alternierenden Form auf U_1 die Darstellungsmatrix

$$D = \begin{pmatrix} 0 & \operatorname{diag}(\delta) \\ -\operatorname{diag}(\delta) & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{wobei} \quad \delta = (1, \ldots, 1, d).$$

Damit ist die Identifikation von d mit dem assoziierten Grad von $J \to A$ gerechtfertigt.

Bleibt noch zu prüfen, inwieweit die Basis von U_2 eindeutig ist, d.h. welche symplektischen Basiswechsel in U_2 mit der Homologiebasis von U verträglich sind:

Lemma 4.1.8. *Sei B eine Homologiebasis von U und sei*

$$(u'_g, u'_{2g})^T = M(u_g, u_{2g})^T \qquad M \in SL_2(\mathbb{Z}).$$

Setzt man $u'_{2g+1} = \frac{1}{d}(u'_g + u_{2g-1})$ und $u'_{2g+2} = \frac{1}{d}(u'_{2g} + u_{g-1})$, so ist

$$B' = \{u_1, \ldots, u_{g-1}, u'_g, u_{g+1}, \ldots, u_{2g-2}, u'_{2g+1}, u'_{2g+2}\}$$

genau dann eine Homologiebasis von U, wenn $M \in \Gamma(d)$ (vgl. Bezeichnung 1.3.10) ist.

Beweis: Die Basiselemente $u_1, \ldots, u_{g-2}, u_{g+1}, \ldots u_{2g-2}$ spielen beim Basiswechsel keine Rolle. Der Beweis von Xiao (Lemme 3.7 in [Xi85]) kann übernommen werden. □

Sei $Z = (z_1, z_2, \ldots, z_{g-1}) \in \mathfrak{h}_{g-1}$ (oder besser $(Z, \mathrm{diag}(\delta))$, wenn man will) eine Periodenmatrix von A (im Siegelschen Halbraum) bzgl. einer Basis, bezüglich der die Polarisierung vom Typ D ist. Dann ist für jedes $z \in \mathfrak{h}$ durch

$$\begin{array}{lcllcll} u_r(z) & = & (z_r^T, 0)^T & u_{g+r}(z) & = & (e_r^T, 0)^T & \text{für } r = 1, \ldots, g-1 \\ u_g(z) & = & (0_{g-1}^T, z)^T & u_{2g}(z) & = & (0_{g-1}^T, 1)^T & \\ u_{2g+1}(z) & = & \frac{1}{d}(0, \ldots, 0, 1, z)^T & u_{2g+2}(z) & = & \frac{1}{d}(z_{g-1}^T, 1)^T & \end{array}$$

ein Gitter $U(z)$ in $V(z) = V = \mathbb{C}^g$ gegeben. Dabei ist e_r der r-te Standardbasisvektor in $\mathbb{C}^{g-1}$. Die Quotienten $J(z) = V(z)/U(z)$ bilden also eine Familie $J(z) \to \mathfrak{h}$ von komplexen Tori. Die alternierende Form mit Darstellungsmatrix

$$D' = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{diag}(\delta') \\ -\mathrm{diag}(\delta') & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{wobei} \quad \delta' = (1, \ldots, 1, d, d)$$

bzgl. $u_1, \ldots, u_{2g}$ ergibt eine Prinzipalpolarisierung auf $J(z)$, es handelt sich also wirklich um abelsche Varietäten. Die Projektion auf die ersten $g-1$ Komponenten liefert einen Morphismus auf $A \times \mathfrak{h}$ und nach Konstruktion eine (A, d)-Struktur auf $J(z)$.
Aufgrund des Lemmas 4.1.8 über den Wechsel der Homologiebasis erhält man wie folgt eine Operation von $\Gamma(d)$ auf dieser Familie: $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma(d)$ operiert auf $\mathfrak{h}$ wie üblich als gebrochen lineare Transformation und wir setzen

$$\begin{array}{lcll} Mu_i & = & u_i & \text{für } i = 1, \ldots, g-1, g+1, \ldots, 2g-1 \\ Mu_g(z) & = & \delta u_g(Mz) - \beta u_{2g}(Mz) & = (0_{g-1}^T, z/\gamma z + \delta)^T \\ Mu_{2g}(z) & = & -\gamma u_g(Mz) + \alpha u_{2g}(Mz) & = (0_{g-1}^T, 1/\gamma z + \delta)^T. \end{array}$$

Diese setzt sich unter Beachtung von $u_{2g+1} = \frac{1}{d}(u_{2g-1} + u_g)$ und $u_{2g+2} = \frac{1}{d}(u_{g-1} + u_{2g})$ zu einer Operation auf U fort und ist so gebastelt, dass $M : J(z) \to J(Mz)$ ein Isomorphismus über A ist. Durch Übergang zum Quotienten erhält man die gesuchte Familie (siehe Bezeichnung 1.3.10)

$$j'(A, d) : J(A, d) \to X'(d).$$

Theorem 4.1.9. *Für $d \geq 3$ ist $j'(A, d)$ die universelle Familie für g-dimensionale, prinzipal-polarisierte abelsche Varietäten mit einer Surjektion auf A vom assoziiertem Grad d.*

Beweis: Da $\Gamma(d)$ für $d \geq 3$ auf der oberen Halbebene frei operiert, ist $j'(A,d)$ wirklich eine Familie von abelschen Varietäten.
Sei $j : J \to T$ eine Familie von abelschen Varietäten wie vorausgesetzt und $p' : J \to A \times T$ ihr Morphismus auf den Fixanteil. Dann ist étale-lokal in der Basis (auf sagen wir T_i) $R^1 j_* \mathbb{Z}$ trivial. Daher kann man zwei Schnitte u^i_{2g+1} und u^i_{2g+2} (in Anlehnung an die Bezeichnungen in der Homologiebasis) finden, die $R^1 j_* \mathbb{Z}/R^1 \operatorname{pr}_{i*} \mathbb{Z}$ erzeugen. Dabei ist $\operatorname{pr}_i : A \times T_i \to T_i$ die Projektion auf die zweite Komponente. Sei ohne Einschränkung $R^1 j_* \mathcal{O}_J$ frei und $V \subseteq R^1 j_* \mathcal{O}_J$ sei der Kern der von p' auf R^1-Niveau induzierten Abbildung. Wir bilden u^i_{2g+1} und u^i_{2g+2} nach $R^1 j_* \mathcal{O}_J$ ab und betrachten die Bilder unter der Projektion nach V (entlang dem Orthokomplement bzgl. $E(\cdot,\cdot)$). Der Quotient davon definiert (ggf. nach Vertauschen der Reihenfolge) eine Abbildung $\varphi_i : T_i \to \mathfrak{h}$. Daher hat man einen eindeutig bestimmten Isomorphismus $J \times_T T_i \cong J(z) \times_{\mathfrak{h}} T_i$, der mit den Morphismen p' und p nach $A \times T_i$ kommutiert. Hat man auf einer anderen étalen Karte T_k eine Trivialisierung von $R^1 j_* \mathbb{Z}$, so findet man auf dem Durchschnitt der Karten einen Isomorphismus, der den kanonischen Isomorphismus $R^1 \mathrm{pr}_{i*}\mathbb{Z} \to R^1 \mathrm{pr}_{k*}\mathbb{Z}$ fortsetzt. Nach dem Lemma über den Wechsel der Homologiebasis gehen die Paare von Schnitten (u^i_{2g+1}, u^i_{2g+1}) und (u^k_{2g+1}, u^k_{2g+1}) auf T_{ik} durch einen $\Gamma(d)$-Basiswechsel auseinander hervor. Da ihre Reihenfolge durch die Normierung auf die obere Halbebene festgelegt ist, steigen die induzierten Morphismen $T_i \to \mathfrak{h}/\Gamma(d)$ zu $\varphi : T \to \mathfrak{h}/\Gamma(d)$ ab. Und aufgrund obiger Eindeutigkeit steigen die Isomorphismen zwischen den Familien von abelschen Varietäten mit ab.
Schließlich ist noch zu bemerken, dass alle auftretenden Objekte algebraisch sind. Siehe dazu z.B. [LB92] Abschnitt 10.8. $\square$

Für $d = 2$ läuft die Konstruktion von $J(z) \to \mathfrak{h}$ wörtlich genauso, aber da $(-1) \in \Gamma(2)$ ist, bildet $j'(A,2)$ keine Familie von abelschen Varietäten. Man kann einen Teil der Ergebnisse retten, indem man ein Komplement $\Gamma(2)_S$ von ± 1 in $\Gamma(2)$ verwendet. Der Index S bezeichnet dabei die irregulären Spitzen der Komplettierung von $\mathfrak{h}/\Gamma(2)_S$. Irregulär bedeutet dabei (siehe [Sh71]), dass der Erzeuger des Stabilisators der Spitze den Eigenwert (-1) besitzt. S ist eine ein- oder dreielementige Teilmenge von $\{0, 1, \infty\}$. Die zu $\Gamma(2)_S$ gehörige Familie bezeichnen wir mit

$$j'(A,2)_S : J(A,d)_S \to X'(2)_S.$$

Dabei ist natürlich $X'(2)_S \cong X'(2) \cong \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$.

Theorem 4.1.10. $X'(2)$ *ist ein grober Modulraum für* g*-dimensionale, prinzipal-polarisierte abelsche Varietäten mit Fixanteil* A *und assoziiertem Grad 2. Jedes solche abelsche Schema* $J \to T$ *ist Pullback von* $J'(A, 2)_S$ *unter der induzierten Abbildung* $T \to \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ *für geeignetes* S.

Beweis: Die Eigenschaft 'grober Modulraum' zeigt man wie oben.
Hält man in der Notation von obigem Beweis die Reihenfolge der Schnitte u^i_{2g+1} und u^i_{2g+2} derart fest, dass der Quotient der Projektionen auf V in der *oberen* Halbebene liegt, so sieht man, dass (-1) nicht als Basiswechselmatrix auftreten kann. Die Basiswechselmatrizen liegen also in einem der Komplemente und dies zeigt die zweite Behauptung. □

Zurück zum Fall $d \geq 3$. Zur Analyse der Modulräume werden wir nicht nur die feste abelsche Varietät A benötigen, sondern alle solchen berücksichtigen. Das bedeutet, dass wir in der Konstruktion vor dem Theorem 4.1.9 die Periodenmatrix Z in $\mathfrak{h}_{g-1}$ laufen lassen. Somit erhält man nach Herausdividieren der $\Gamma(d)$-Aktion (vgl. 1.3.10) eine Familie von prinzipalpolarisierten abelschen Varietäten

$$J(Z) \to X'(d) \times \mathfrak{h}_{g-1}.$$

Da der Modulraum für polarisierte abelsche Varietäten nicht fein ist, kann man nicht erwarten, dass man nach Herausdividieren der Γ_D-Aktion im zweiten Faktor eine Familie von polarisierten abelschen Varietäten erhält. Stattdessen stehen in speziellen Fasern Quotienten von abelschen Varietäten nach nichttrivialen Automorphismen. Um dennoch einen feinen Modulraum zu bekommen, den wir technisch benötigen, müsste man „Stack“ murmeln oder hilfsweise eine geeignete Levelstruktur benutzen. Letzteres wird im Folgenden durchgeführt. Sei $G < \Gamma_D$ (Notation wie in Bezeichnung 1.3.10) eine Untergruppe von endlichem Index zu einer Levelstruktur, derart, dass $A^{[n]}_{g-1,\delta} = \mathfrak{h}_{g-1}/G$ ein feiner Modulraum für abelsche Varietäten mit Polarisierung vom Typ δ und dieser Levelstruktur ist. Der Quotient obiger Familie nach G ist eine Familie

$$j'(d) : J(d) \to X'(d) \times A^{[n]}_{g-1,\delta}$$

von prinzipalpolarisierten abelschen Varietäten mit Morphismus auf ein (festes) abelsches Schema. Ganz analog zu obigem Theorem zeigt man nun:

Lemma 4.1.11. *Für $d \geq 3$ ist $j'(d)$ die universelle Familie für g-dimensionale abelsche Schemata mit einem Morphismus auf ein $g-1$-dimensionales abelsches Schema mit obiger Levelstruktur.*

Wir untersuchen im Folgenden die von $j'(d)$ induzierte Modulabbildung

$$m' : X'(d) \times A_{g-1,\delta}^{[n]} \to A_g$$

und deren Einschränkung m'_A auf eine festes $A \in A_{g-1,\delta}^{[n]}(\mathbb{C})$.

Lemma 4.1.12. *m'_A ist für alle $d \geq 3$ und alle A injektiv.*

Beweis: Zunächst der generische Fall $\mathrm{End}(A) = \mathbb{Z}$. Mit den Bezeichnungen 4.1.1 ist zu zeigen, dass man bei gegebenen Einbettungen $i_k : A_1 \to J_k$ für $k = 1, 2$ und einem Isomorphismus $\beta : J_1 \to J_2$ einen Isomorphismus $\beta' : J_1 \to J_2$ findet, sodass $\beta' \circ i_1 = i_2$ gilt. Wegen der Irreduzibilität von A und (damit von A_1) ist zunächst $i_2(V_1) = \beta \circ i_1(V_1)$. Also induziert $\beta|_{V_1}$ einen Automorphismus von A_1, nach Voraussetzung ± 1. Folglich leistet $\beta' = \pm\beta$ das Verlangte.
Für die anderen A verwenden wir

$$(m' \times \mathrm{id}) : X'(d) \times A_{g-1,\delta}^{[n]} \to A_g \times A_{g-1,\delta}^{[n]}.$$

Wir haben gezeigt, dass sie für ein generisches zweites Argument injektiv ist. Schränken wir die Abbildung auf eine Kurve im Bild ein, die den generischen Lokus von A_g trifft, so ist die Abbildung flach: Dies folgt aus der Tatsache, dass $X'(d)$ nie auf einen Punkt in A_g abgebildet wird. Das Urbild dieser Kurve ist also irreduzibel. Aus Flachheitsgründen sind dann aber auch die Fasern über den anderen abelschen Varietäten einelementig.
$\square$

Bemerkung 4.1.13. Auf die gleiche Art erhält man im Fall $d = 2$ die Familien

$$j'(2)_S : J(2)_S \to X'(2)_S \times A_{g-1,\delta}^{[n]}$$

und mit dem gleichen Beweis ist auch

$$(m'_A)_S : X'(2)_S \to A_g$$

injektiv.

4.2 Prototypen für maximal irreguläre Faserungen

Wir schränken unsere Betrachtungen auf einen Unterfunktor $\mathfrak{S}_{g,b}$ von $\mathfrak{S}$ für gefaserte Flächen vom allgemeinen Typ mit maximaler Irregularität ein und

wir setzen im Rest dieses Kapitels voraus, dass alle Familien von Flächen in $\mathfrak{S}_{g,b}$ gefaserte Familien sind.

Dies ist für die Fälle, in denen wir die stärksten Strukturaussagen erhalten, keine Einschränkung, wie aus Lemma 2.3.2 folgt. Deswegen verwenden wir die Begriffe 'Familie gefaserter Flächen' und 'gefaserte Familie von Flächen' austauschbar.

Wir führen im Folgenden den Begriff Prototyp für beliebige Faserungen ein, obwohl wir die Existenz eines solchen nur für maximal irreguläre zeigen werden.

Definition 4.2.1. *Ein relativ minimales Modell einer gefaserten Fläche $S(A,d) \to B(d)$ heißt* Prototyp für gefaserte Flächen vom Typ (g,b) mit Fixanteil (A,λ), *falls jede Familie gefaserter Flächen vom allgemeinen Typ $X \to B \to T \in \mathfrak{S}(T)$ vom Typ (g,b), assoziiertem Grad d und Fixanteil $(A \times T, \lambda)$ sich als kanonisches Modell von*

$$B \times_{B(d)} S(A,d)$$

für einen eindeutigen, surjektiven Morphismus $\varphi : B \to B(d)$ darstellen lässt.
Liefert umgekehrt das kanonische Modell des Pullbacks über einen solchen Morphismus φ eine gefaserte Fläche mit richtigem Fixanteil, so nennen wir den Prototyp gut.

Natürlich ist für eine Familie gefaserter Flächen die Kurve B im Allgemeinen höchstens bis auf Isomorphie eindeutig. In den betrachteten Fällen ist sie dies aufgrund von jenem Lemma 2.3.2. In obiger Definition wird lediglich verlangt, dass φ eindeutig ist, sobald B gewählt wurde, mit anderen Worten, das dessen Isomorphieklasse im entsprechenden Hurwitz-Schema eindeutig bestimmt ist. Mehr dazu im nächsten Abschnitt.
Wenn es solche Prototypen gibt, lassen sich die Invarianten irregulärer Faserungen und ihre singulären Fasern in Abhängigkeit von φ beschreiben.

Wenn die Irregularität von $X \to B$ maximal und $d \geq 3$ ist, so liefert Theorem 4.1.9 zusammen mit Torelli einen Prototypen, falls die prinzipalpolarisierten abelschen Varietäten wirklich Jacobische sind. Daher folgende Fallunterscheidungen.

4.2.1 Maximal irreguläre Faserungen mit $d \geq 3$ für Fasergeschlecht $g = 2$ oder $g = 3$

Xiao Gang hat gezeigt ([Xi85] Th. 3.10):

Theorem 4.2.2. *Für $d \geq 3$ und jede eindimensionale abelsche Varietät A gibt es einen guten Prototyp $S(A, d)$ für Faserungen vom Typ $(2, b)$ mit Fixanteil A und assoziiertem Grad d. Dabei ist die Basis die Modulkurve $X(d)$.*

Die Beweisidee reichen wir am Ende des Abschnitts nach. Ziel dieses Abschnitts ist folgende Verallgemeinerung für den Fall $g = 3$, bei dem der hyperelliptische Lokus das Leben interessanter gestaltet.

Theorem 4.2.3. *Sei (A, λ) eine irreduzible, zweidimensionale $(1, d)$-polarisierte abelsche Varietät mit $d \geq 3$, die keine prinzipalpolarisierte eindimensionale abelsche Untervarietät besitzt. Dann gibt es einen Prototyp $S(A, d)$ für Faserungen vom Typ $(3, b)$ mit Fixanteil (A, λ) und assoziiertem Grad d. Die Basis ist wiederum die Modulkurve $X(d)$.*

Zunächst zwei Hilfsaussagen über die Struktur der Fasern des zu bauenden Prototyps.

Lemma 4.2.4. *Ist die generische Faser einer maximal irregulären Faserung vom Typ (g, b) mit $g \geq 3$ hyperelliptisch, so ist der assoziierte Grad $d = 2$ und die Faserung produktisogen.*
Ist umgekehrt eine maximal irreguläre Faserung vom Typ (g, b) isotrivial, so ist der assoziierte Grad $d = 2$ und $g = 3$ und die Faserung sogar produktisogen.

Beweis: Bei hyperelliptischen Faserungen mit einem Fixanteil der Dimension ≥ 2 ist das Albanese-Bild ein Produkt, hier notwendigerweise aus der Basiskurve und einer Kurve vom Geschlecht 2. Dies folgt aus [Pi89],

siehe auch [Xi92]. Die Albanese-Abbildung induziert also nach dem Satz von Riemann-Hurwitz eine unverzweigte, zweiblättrige Überlagerung jeder Faser. Aus dem Kontext von Prym-Varietäten weiß man (z.B. [LB92] Theorem 12.3.3), dass in diesem Fall der assoziierte Grad 2 ist. Da die Fläche faserweise unverzweigt auf ein Produkt abgebildet wird, muss sie produktisogen sein.
Ist die Faserung isotrivial, so ist das Bild einer Faser eine Kurve vom Geschlecht g–1, nämlich die entsprechende Faser des Albanese-Bildes. Dies ist, unter der Voraussetzung $g \geq 3$, nur bei einer unverzweigten Überlagerung vom Grad 2 ausgehend von einer Kurve vom Geschlecht 3 möglich. Und in diesem Fall ist der assoziierte Grad des Morphismus der Jacobischen wie oben gleich 2 und die Fläche sogar produktisogen. □

Lemma 4.2.5. *Die Zahl der reduziblen abelschen Varietäten in $j'(A, d)$ ist aufgrund der Voraussetzung an A endlich.*

Beweis: Da Reduzibilität eine abgeschlossene Bedingung ist, gilt es für jedes A ohne eindimensionale prinzipalpolarisierte Untervarietät und jedes $d \geq 3$ ein $z \in \mathfrak{h}$ zu finden, sodass $J(z)$ irreduzibel ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn es keine $u, u' \in U(z)$ mit $E(u, u') = 1$ gibt, die der Beziehung $u = hu'$ für ein $h \in \mathfrak{h}$ genügen. Sei $u = \sum_{i=1}^{6} c_i u_i$ mit $c_i \in \frac{1}{d}\mathbb{Z}$ und $c_1, c_4, c_2 - c_6, c_3 - c_5 \in \mathbb{Z}$. Analog schreiben wir u' als Linearkombination mit Koeffizienten c'_i. Nun gibt es abzählbar viele 12-Tupel c_i, c'_i mit $E(u, u') = 1$. Halten wir eines davon fest. Wenn für ein z zudem $u = hu'$ gilt, so ist (c_3, c_6, c'_3, c'_6) nicht das Nulltupel, sonst hat man einen Widerspruch zur Voraussetzung an die abelschen Untervarietäten von A. Schreibt man $u = hu'$ in Koordinaten, so legen das 12-Tupel und A den Faktor h fest. Die dritten Koordinaten besagen dann

$$c_3 z + c_6 = h(c'_3 z + c_6),$$

und dies ist für genau ein z lösbar. Insgesamt führen also abzählbar viele $z \in \mathfrak{h}$ zu möglicherweise reduziblen abelschen Varietäten $J(z)$. Da das Unterschema von $X'(d)$ mit reduziblen Fasern abgeschlossen ist, müssen es in der Tat endlich viele sein. □

Beweis des Theorems: Zur Anwendung der Torelli-Variation Satz 1.3.16 ist nur noch zu zeigen, dass das Bild von $X'(d)$ unter der Modulabbildung m_A nicht im hyperelliptischen Lokus $i(H)$ liegt. Wäre dem so, so definiert man nach Basiswechsel $B' \to X'(d)$ eine Levelstruktur auf dem Pullback von $J'(A,d)$. Zieht man die universelle Familie auf $M_3^{[n]}$ über die Abbildung

$$\mathrm{pr}_2 : B' \times_{A_3^{[n]}} M_3^{[n]} \to M_3^{[n]}$$

zurück und normalisiert, so wäre dies eine maximal irregulär gefaserte Fläche vom assoziierten Grad $d \geq 3$ mit hyperelliptischer generischer Faser. Dies widerspricht Lemma 4.2.4. Die Torelli-Variation liefert uns also eine Familie von Kurven über einem dichten Teil von $X'(d)$. Wir bezeichnen das relativ minimale Modell der Komplettierung davon mit $h(A,d) : S(A,d) \to X(d)$.
Zum Nachweis der universellen Eigenschaft des Prototyps sei $X \to B \to T$ eine gefaserte Familie von Flächen mit Fixanteil $A \times T$. Zu $X \to B \to T$ erhält man wie in Abschnitt 1.3 einen Morphismus $p : \underline{\mathrm{Jac}}_{X^0/B^0} \to A_{B^0} = A \times B^0$ und damit aufgrund der universellen Eigenschaft von $j'(A,d)$ einen Morphismus $\varphi^0 : B^0 \to X'(d)$. Dieser ist surjektiv, denn sonst wäre in einer Faser, über sagen wir t, $\underline{\mathrm{Jac}}_{(X_t)^0/(B_t)^0}$ ein Produkt. Dies hätte zur Folge, dass $X_t \to B_t$ isotrivial wäre und für solche Flächen ist notwendigerweise $d = 2$, wie aus Lemma 4.2.4 folgt. Da B eine glatte relative Kurve ist, hat man eine Fortsetzung von φ^0 zu einem Morphismus $\varphi : B \to X(d)$. Die birationale Äquivalenz von X und $X' = B \times_{X(d)} S(A,d)$ folgt aus der Eindeutigkeitsaussage in Satz 1.3.16.
Zur Eindeutigkeit von φ: Sei $P \in B(\mathbb{C})$ und F_P die Faser von $X \to B$ über P. Eingeschränkt auf eine dichte Teilmenge von B bildet der Morphismus $m_A \circ \varphi$, aufgrund der universellen Eigenschaft des Prototyps, den Punkt P auf den Modulpunkt der Isomorphieklasse von $\underline{\mathrm{Jac}}_{F_P}$ ab. Die Eindeutigkeit folgt nun aus der Tatsache, dass m_A injektiv ist (Lemma 4.1.12). $\square$

Bemerkung 4.2.6. Die Voraussetzungen an A in obigem Theorem sind wirklich notwendig: Enthält A eine prinzipalpolarisierte eindimensionale abelsche Untervarietät, so sind die Fasern von $j'(A,d)$ sämtlich mit Polarisierung reduzibel. Da die generische Faser einer Faserung glatt ist, gibt es keine Faserung, die dieses $j'(A,d)$ (auch nicht lokal) als Jacobische hat.

Wir wollen nun die Invarianten von $S(A,d)$ für $g = 3$ bestimmen. Dazu benötigen wir zunächst Informationen über die singulären Fasern. Wir bezeichnen den dichten Teil von $X'(d)$, der nach $\mathrm{Bild}(M_3 \smallsetminus H) \subset A_3$ abgebildet wird, mit $X''(d)$. Ein Punkt in $X'(d)$ zum Prototyp $S(A,d)$

heißt *hyperelliptisch*, falls er unter der Modulabbildung in den Abschluss $\overline{H} \subseteq A_3$ des hyperelliptischen Lokus abgebildet wird. Diese Bezeichnung hängt natürlich von A ab.
Noch ein paar Bezeichnungen aus der Welt der Modulkurven: Sei $t(d)$ die Anzahl der Spitzen von $X(d)$ und $s(A,d)$ die Anzahl der Punkte, über denen $J(A,d)$ mit Polarisierung reduzibel ist. Setzt man

$$\Delta_d = \frac{d^2}{24}\prod_{p|d}(1-\frac{1}{p^2}),$$

dann gilt (siehe z.B. [Sh71]):

$$g(X(d)) = (d-6)\Delta_d + 1$$
$$t(d) = 12\Delta_d.$$

Lemma 4.2.7. *Die Fasern von $S(A,d)$ über $X''(d)$ sind glatt.*

Beweis: Dies ist für die Familie über B' richtig (Bezeichnungen wie im Beweis von Theorem 4.2.3), da über $X''(d)$ die Jacobischen per Definition mit Polarisierung irreduzibel sind, und bleibt beim Abstieg erhalten. □

Lemma 4.2.8. *Ist* $\mathrm{End}(A) = \mathbb{Z}$, *so schneidet $X(d)$ in A_g den reduziblen Lokus höchstens in den Spitzen.*

Beweis: Zu zeigen ist, dass die Fasern von $j'(A,d)$ nicht mit Polarisierung reduzibel sind. Dies folgt aus der Konstruktion in Abschnitt 4.1: Angenommen $J \cong E \times A'$ ist reduzibel mit Polarisierung. Dann muss E nach Voraussetzung im Kern der Projektion $J \to A$ liegen. Dann aber teilt d den Grad der Polarisierung von E. Widerspruch. □

Zur Bestimmung der singulären Fasern werden wir im Rest des Abschnittes mit Monodromie-Argumenten (wie z.B. in [Na74]) arbeiten. Daher verwenden wir die komplex-analytische Kategorie und Topologie.

Lemma 4.2.9. *Die Monodromie von j bzgl. eines Weges γ um eine Spitze ist*

$$M(\gamma) = I_6 + E_{3,6} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

die Monodromie über den Punkten $X'(d) \setminus X''(d)$ ist trivial.

Beweis: Um die Monodromie bei einer Spitze zu berechnen, kann man ohne Einschränkung die bei ∞ betrachten. In der Notation von Definition 1.4.1 ist $\alpha_1 = u_1$, $\alpha_2 = u_8$, $\alpha_3 = u_7$, $\beta_1 = u_4$, $\beta_2 = u_5$ und $\beta_3 = u_6$ eine kanonische Basis von $H^1(F, \mathbb{Z})$ der allgemeinen Faser F. Aus dieser kann man die Periodenmatrix leicht ablesen. Sie hat für die Faser über $z \in \mathfrak{h}$ die Gestalt

$$T(z) = \begin{pmatrix} z_{11} & \frac{z_{21}}{d} & 0 \\ z_{12} & \frac{z_{22}}{d} & \frac{1}{d} \\ 0 & \frac{1}{d} & \frac{z}{d} \end{pmatrix}.$$

Ein Lift nach $\mathfrak{h}$ eines Weges um ∞ ist der Weg γ von z nach $z + d$. Die Monodromiematrix $M(\gamma)$ genügt per Definition der Beziehung $T(z + d) = M(\gamma) \cdot T(z)$, wobei die Aktion rechts per Möbiustransformation geschieht (vgl. [Na74]). Also ist $M(\gamma)$ wie behauptet.
Die zweite Aussage ist klar, da man einen Weg um einen solchen Punkt nach $\mathfrak{h}$ liften und dort kontrahieren kann. $\square$

Nach der Torelli-Variation Satz 1.3.16 ist die Jacobische von $S(A, d) \to X(d)$ nur lokal gleich $J(A, d)$. Global ist diese Aussage, wie wir gleich sehen, nicht richtig. Um zu untersuchen, was genau geschieht, suchen wir eine Überlagerung von $X(d)$, so dass die induzierte Abbildung nach $M_3^{[n]}$ liftet. Die Operation von $\Gamma(d)$ auf $\mathfrak{h}_3$ (siehe Konstruktion vor Th. 4.1.9) induziert eine Injektion nach $Sp(3, \mathbb{Z})$. Bzgl. der symplektischen Basis aus dem Beweis von Lemma 4.2.9 lautet diese

$$\phi : \begin{cases} \Gamma(d) \quad \to \quad Sp(3, \mathbb{Z}) \\ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \gamma & 0 & \frac{-\gamma}{d} & \frac{\delta-1}{d} \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & \frac{1-\alpha}{d} & \frac{\beta}{d} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & d\gamma & 0 & -\gamma & \delta \end{pmatrix} \end{cases}$$

Die Periodenmatrix $T(z)$ über $z \in \mathfrak{h}$ bestimmt eine abelsche Varietät zusammen mit einer symplektischen Basis. Wählen wir uns bzgl. dieser Basis die Level-n-Struktur

$$\alpha : (a_1 u_1, \ldots, a_6 u_6) \mapsto (a_1, \ldots, a_6) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^6,$$

so erkennt man, dass diese invariant unter $M \in \Gamma(d)$ ist, wenn M sogar in $\Gamma(nd)$ liegt. Als rechentechnische Vereinfachung wählen wir n prim und zu d teilerfremd. Dann liefert der Quotient $J(z) \to \mathfrak{h}$ nach $\Gamma(nd)$ eine Familie über $X(nd)$, die wir der Einfachheit halber mit J_2 abkürzen. Wie im Beweis zu Theorem 4.2.3 sei $h_2 : S_2 \to X(nd)$ die induzierte relative Kurve. Wir bezeichnen noch mit $m' : X'(d) \to M_3$ und $m'_2 : X'(nd) \to V_3^{[n]}$ die kanonischen Abbildungen außerhalb der Spitzen in den Modulraum. Nach [Po77] besitzt auch $M_3^{[n]}$ eine Kompaktifizierung $\overline{M_3}^{[n]}$ durch stabile Kurven. Die Involution Σ (vgl. Abschnitt 1.3.2) setzt sich darauf fort. Sei $m_2 : X(nd) \to \overline{V_3}^{[n]}$ die Fortsetzung von m'_2. Halten wir an dieser Stelle noch fest, dass der Morphismus $X(nd) \to X(d)$ galoissch ist, den Grad $n^3 - n$ hat und genau über den Spitzen jeweils n-blättrig verzweigt.

Lemma 4.2.10. *m_2 faktorisiert in keiner komplexen Umgebung eines hyperelliptischen Punktes über $\overline{M_3}^{[n]}$. Ist*

$$B \to X(nd) \times_{\overline{V_3}^{[n]}} \overline{M_3}^{[n]}$$

die Normalisierungsabbildung, so schneidet das Bild von B in $\overline{M_3}^{[n]}$ den hyperelliptischen Lokus transversal.

Beweis: Zunächst ist m'_2 injektiv, mit dem Beweis analog zu Lemma 4.1.12. Ist $P \in B(\mathbb{C})$ ein Urbild eines hyperelliptischen Punktes auf $X(nd)$, so folgen beide Behauptungen, wenn gezeigt ist, dass das Bild der Abbildung $m_B : B \to \overline{M_3}^{[n]}$ im Punkt P den hyperelliptischen Lokus transversal schneidet und zudem der Tangentialraum in P an das Bild von B unter der Involution Σ invariant ist.
Sei $h_{U_0} : S_0 \to U_0$ die von $S(A, d)$ induzierte Familie von Kurven über der punktierten Umgebung U_0 des Punktes P. Nach Konstruktion ist deren Jacobische wirklich $J_{U_0} = J'(A, d) \times_{X'(d)} U_0$, die Monodromie der Familie um P unipotent. Also gibt es nach Satz 1.4.3 über $U = U_0 \cup \{P\}$ eine stabile Familie von Kurven $h : S \to U$. Sei C die Faser von h über P. Wir unterscheiden nun die Fälle, ob P über einer Spitze von $X(nd)$ liegt oder nicht.
Im zweiten Fall hat $p(C)$ das geometrische Geschlecht 3, denn wenn das Bild von $p(C)$ eine Kurve von Geschlecht zwei wäre, dann hätte p den assoziierten Grad 2. Deformationen erster Ordnung der Normalisierung von

$p(C)$, also des Paares (C,p) werden nach ([Tm84] Abschnitt vor Lemma 1.5) durch $H^0(C,K_C)$ parametrisiert, da der kanonische Divisor auf A trivial ist. Die Kodaira-Spencer-Abbildungen induzieren also ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} T_{B,P} \arrow[rr, "\kappa_{h,P}"] \arrow[dr, "\kappa_P"'] & & H^1(C,T_C) \\ & H^0(C,K_C) \arrow[ur, "\delta"'] & \end{tikzcd}$$

in dem δ der Verbindungshomomorphismus zur exakten Sequenz

$$0 \to T_C \to T_A|_C \to K_C \to 0$$

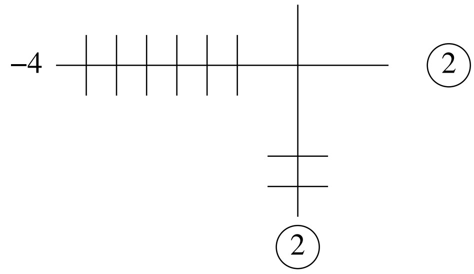
ist. Dabei ist κ_P nicht die Nullabbildung, denn J_U ist in keiner Umgebung von P die triviale Deformation von $\underline{\mathrm{Jac}}_C$, wie man schon an der Ausgangsfamilie $J(z) \to \mathfrak{h}$ erkennt. Andererseits operiert die hyperelliptische Involution auf einem 5-dimensionalen Untervektorraum von $H^1(C,T_C)$ trivial (vgl. die explizite Basis in [OS80] Lemma 2.14). Da die Involution auf ganz $H^0(C,K_C)$ als (-1) operiert, ist das Bild von κ_P invariant unter der Involution und schneidet den hyperelliptischen Lokus transversal wie behauptet.

Den Fall, dass P über einer Spitze liegt, behandelt man im Wesentlichen genauso. Da die Monodromiematrix bei P gerade $M(\gamma) = I_6 + 2E_{3,6}$ ist und die Jacobische von C nicht eigentlich ist, muss die Faser eine Kurve vom Geschlecht 2 mit einem Knoten sein. Ist $\pi : \tilde{C} \to C$ deren Normalisierung, so werden (vgl. [Tm84] Lemma 1.5 und Rem. 1.6) Deformationen erster Ordung des Paares $(\tilde{C}, p \circ \pi)$ durch $H^0(\tilde{C}, K_{\tilde{C}})$ parametrisiert. Dabei wird wiederum verwendet, dass das Tangentialbündel an A trivial und dass der Verzweigungsdivisor von $\tilde{C} \to C$ ebenfalls trivial ist. Auf $H^0(\tilde{C}, K_{\tilde{C}})$ operiert die hyperelliptische Involution ebenfalls durchweg als (-1) und die Argumentation geht nun wie oben zu Ende. □

Korollar 4.2.11. *Ist $X \to B$ eine gefaserte Fläche wie oben, so hat die induzierte Abbildung $B \to X(d)$ in jedem Punkt von B, der über einem hyperelliptischen liegt, gerade Verzweigungsordnung. Insbesondere ist der Prototyp im Fall $g = 3$ nicht gut.*

Satz 4.2.12. *Die Fläche $S(A,d)$ hat keine Fasern mit eigentlicher, aber reduzibler Jacobischer d.h. $s(d) := s(A,d) = 0$ für alle A.*

Die Faser über den hyperelliptischen Punkten von $X'(d)$ besteht aus einer doppelten rationalen Kurve mit Selbstschnitt (-4), die von 8 (-2)-Kurven transversal geschnitten wird.
Die Faser über den nicht-hyperelliptischen Spitzen ist eine Kurve vom Geschlecht 2 mit einem Knoten.
Über hyperelliptischen Spitzen liegt folgende Faser:



Umkreiste Zahlen kennzeichnen dabei Vielfachheiten, die -4 ist der Selbstschnitt der (zentralen) rationalen Kurve und unbezeichnete Kurven sind -2-Kurven.

Beweis: Die erste Aussage wurde für den generischen Fall in Lemma 4.2.8 gezeigt. Würde für ein spezielles $A \in A_{2,\delta}(\mathbb{C})$ eine solche Faser auftreten, wäre $c_2(S(A,d))$ höher (vgl. Beweis des folgenden Korollars) als im generischen Fall. Im folgenden Abschnitt (vor Lemma 4.3.2) werden die verschiedenen $S(A,d)$ zu einer Familie $S(d) \to A_{2,\delta}^{[n]}$ zusammengefasst. Und die Flachheit verbietet, dass c_2 für spezielle A anders ist.
Nehmen wir eine kleine (komplexe) Umgebung U eines hyperelliptischen Punktes. Wäre die Faser glatt und damit die Monodromie trivial, so gilt dies (in den Bezeichnungen der Konstruktion vor Lemma 4.2.10) auch noch für eine Umgebung eines Urbildes in der Überlagerung $S_2 \to X(nd)$. Dann aber hätte man auf dieser Umgebung global eine Level-n-Struktur, also einen Schnitt nach $M_3^{[n]}$, den es nach Lemma 4.2.10 nicht geben kann. Aus dem gleichen Grund ist aber nach einer zweiblättrigen Überlagerung die spezielle Faser glatt und damit auch der Totalraum in der Nähe der Faser. Daher hat der Quotient des stabilen Modells 8 A_1-Singulariäten an den isolierten Fixpunkten der Involution, in die man (-2)-Kurven blasen muss, um die Faser von $S(A,d)$ zu erhalten.
Die Faser über den nicht-hyperelliptischen Spitzen ist nach obiger Monodromiebestimmung und Satz 1.4.3 stabil. Die Periodenmatrix sagt, dass ihre Jacobische eine Erweiterung der Jacobischen einer Geschlecht-2-Kurve mit einem Torus ist. Außer der angegebenen Möglichkeit ist für die Faser

noch eine glatte Kurve von Geschlecht 2 zusammen mit einem $\mathbb{P}^1$, der sich normal überkreuzt, denkbar. Aber in diesem Falle hätte die Periodenmatrix Blockgestalt, was wir nach den Berechnungen im Beweis zu Lemma 4.2.9 ausschließen können.
Bei den hyperelliptischen Spitzen ist die Monodromie wiederum nach Lemma 4.2.10 gerade $M(\gamma) = -(I_3 + E_{3,6})$. Nach einer zweiblättrigen Überlagerung $D' \to D$ einer Umgebung der Spitze ist die spezielle Faser der zurückgezogenen Familie $X' \to D'$ also stabil. Diese hat genau einen Knoten und nicht-eigentliche Jacobische. Es muss sich also um eine hyperelliptische Kurve vom Geschlecht 2 handeln, bei der zwei unter der Involution konjugierte Punkte identifiziert wurden. Die Monodromie impliziert, dass die stabile Reduktion den hyperelliptischen Lokus mit Vielfachheit 2 schneidet. Also hat der Totalraum beim Knoten der speziellen Faser eine A_1-Singularität. Sei t' eine Koordinate von D'. Die Involution $t' \mapsto -t'$ induziert auf der speziellen Faser die hyperelliptische Involution. Deren Fixpunkte sind isolierte Fixpunkte der Involution auf dem Totalraum, die als Quotient eine A_1-Singularität ergeben. Die Singularität von X' muss natürlich auch unter der Involution fix bleiben. Wir zeigen noch, dass der Quotient vom Typ A_3 ist. Nach deren Auflösung sieht die spezielle Faser über D aus wie gezeichnet und die fehlenden Vielfachheiten und Selbstschnittzahlen ergeben sich aus den üblichen Formeln (z.B. [Na74], Abschnitt 1.1).
Sei $x^2 + y^2 + t'^2 = 0$ eine Gleichung der Singularität in lokalen Koordinaten. Nach der Liste der Involutionen rationaler Doppelpunkte in [Cat87] bleibt zu zeigen, dass neben t' genau eine Koordinate unter der Involution des Totalraums auf ihr Negatives abgebildet wird. Ist ohne Einschränkung x eine lokale Koordinate der glatten Faser über $t' \neq 0$, so wird diese aufgrund der Monodromie der Ausgangsfamilie mit $-x$ in der Faser über $-t'$ identifiziert. Die dritte Koordinate kann aber nicht auch noch negiert werden, denn sonst würde ein Weg in der Faser über t' unter der Involution auf einen Weg in der Faser über $-t'$ mit der gleichen Orientierung abgebildet werden. Dies wäre ein Widerspruch zur Monodromie der Ausgangsfamilie. $\square$

Korollar 4.2.13. *Eine maximal irregulär gefaserte Fläche vom Typ* $(3, b)$ *ist semistabil.*

Beweis: Dies ist die unmittelbare Konsequenz aus obiger Beschreibung der Fasern und Korollar 4.2.11 □

Korollar 4.2.14. *Die gefaserte Fläche* $S(A,d) \to X(d)$ *hat*

$$h = (18d - 48)\Delta_d$$

hyperelliptische Fasern. Die Invarianten von $S(A,d)$ *sind:*

$$\begin{array}{lcl} c_2(S(A,d)) & = & (260d - 708)\Delta_d \\ \chi(\mathcal{O}_{S(A,d)}) & = & (30d - 84)\Delta_d \\ K^2_{S(A,d)} & = & (100d - 300)\Delta_d \end{array}$$

Insbesondere sind die Flächen $S(A,d)$ *für alle* $d \geq 4$ *vom allgemeinen Typ.*

Beweis: Um die Zahl der hyperelliptischen Fasern zu bestimmen, verwenden wir die Tatsache, dass für eine stabile Kurve $\pi : S \to B$ über einer eigentlichen Basiskurve B folgendes gilt ([HM98] Formel 3.165):

$$H = 9\lambda - 2\delta_0 - 3\delta_1.$$

Dabei ist H die Zahl der hyperelliptischen Kurven, λ der Grad von $\pi_*\omega_{S/B}$ und δ_i die Zahl der Kurven, deren Bild unter der Modulabbildung im Divisor $\Delta_i \subset \overline{M_3}$ landet, dessen generisches Element wie folgt aussieht: Für $i = 0$ ist es eine Kurve vom Geschlecht 2 mit einem Knoten und für $i = 1$ isind es zwei elliptische Kurven, die an einer normalen Überkreuzung zusammenhängen. Dabei sind die Beiträge zu H und δ_i mit Vielfachheiten (siehe [HM98]) zu zählen.
Wir verwenden zur Berechnung zunächst die Fläche $h_3 : S_3 \to B$, wobei B die Kurve mit Morphismus nach $M_3^{[n]}$ aus Lemma 4.2.10 und S_3 ein relativ minimales Modell der induzierten Fläche ist. Sei $j(A,d) : J(A,d) \to X(d)$ die semistabile abelsche Varietät, die $J'(A,d)$ fortsetzt (vgl. Beweis zu Satz 1.4.3) und $j_2 : J_2 \to X(nd)$ bzw. $j_3 : J_3 \to B$ die Pullbacks auf die entsprechenden Basiskurven. Die Fläche S_3 ist so gebastelt, dass $\underline{\mathrm{Jac}}_{S_3/B} \cong J_3$ ist. In der Tat gilt dies außerhalb der Spitzen und da S_3 semistabil ist, folgt die Behauptung nach dem Fortsetzungssatz für Morphismen semiabelscher Schemata ([FC90] Prop. I.2.7). Also ist

$$\deg h_{3*}\omega_{S_3/B} = -\deg(\bigwedge^3 R^1 j_{3*}\mathcal{O}_{J_3}) = -2(n^3-n)\deg(\bigwedge^3 R^1 j(A,d)_*\mathcal{O}_{J(A,d)}).$$

Diesen Grad kann man mit Hilfe von Modulformen (vgl. [Xi85] Beweis von Th. 3.10) bestimmen. Er ist

$$\deg(\bigwedge^3 R^1 j(A,d)_* \mathcal{O}_{J(A,d)}) = -(g(X(d)) - 1 + t(d)/2) = -d\Delta_d.$$

Weiterhin ist $\delta_0 = 2(n^3 - n)t(d)$, da man aus der Monodromie abliest, dass $X(d)$ den Rand transversal schneidet, $X(nd)$ und B also n-fach. Unter Verwendung von $\delta_1 = s(d) = 0$ erhält man schließlich

$$H = (9 \cdot 2d\Delta_d - 48\Delta_d)(n^3 - n).$$

Nach Lemma 4.2.10 schneidet B den hyperelliptischen Lokus transversal, also gibt es in S_3 genau H hyperelliptische Fasern. Da $B \to X(nd)$ genau über den hyperelliptischen Punkten verzweigt und $X(nd) \to X(d)$ den Grad $n^3 - n$ hat, ist $h = H/(n^3 - n)$ und damit folgt die Behauptung.
Ist F eine generische Faser der Faserung $h(A,d)$, so ist bekanntlich

$$\sum_{F' \text{singulär}} (\chi_{\text{top}}(F') - \chi_{\text{top}}(F)) = c_2(S(A,d)) - \chi_{\text{top}}(F) \cdot \chi_{\text{top}}(X(d)).$$

Die Eulercharakteristik einer Kurve vom Geschlecht g mit einem Doppelpunkt ist gerade $1 - 2g$. Da die Eulercharakteristik einer Faser gleich der der Reduktion ist und das Anheften eines $\mathbb{P}^1$ die Eulercharakteristik um 1 erhöht, gilt für die 'hyperelliptischen' Fasern $\chi_{\text{top}} = 10$. Schließlich haben die 'hyperelliptischen' Fasern am Rand $\chi_{\text{top}} = 11$ und es gilt in allen Fällen

$$c_2(S(A,d)) = 8(g(X(d)) - 1) + 1 \cdot t(d) + 14h$$

die behauptete Formel.
Zur Bestimmung von $\chi(\mathcal{O}_{S(A,d)})$ verwenden wir wieder die gefaserte Fläche $h_3 : S_3 \to B$. Mit Hilfe der Leray-Spektralsequenz erkennt man, dass

$$\chi(\mathcal{O}_{S_3}) = \chi(\mathcal{O}_B) - \chi(R^1(h_3)_* \mathcal{O}_{S_3}).$$

Nach Riemann-Roch für Vektorbündel ist also

$$\chi(\mathcal{O}_{S_3}) = 2(g(B) - 1)) - \deg(\bigwedge^3 R^1(h_3)_* \mathcal{O}_{S_3})$$

und wie oben ist

$$\deg(\bigwedge^3 R^1(h_3)_* \mathcal{O}_{S_3}) = -2(n^3 - n)d\Delta_d.$$

Da $B \to X(nd)$ genau über den hyperelliptischen Punkten verzweigt, sagt Riemann-Hurwitz

$$2(g(B) - 1)) = 4(g(X(nd)) - 1) + H$$

Man erhält schließlich

$$\chi(\mathcal{O}_{S_3}) = 4(g(X(nd)) - 1) + H + (n^3 - n)2d\Delta_d.$$

Um auf die Eulercharakteristik von S_2 zu schließen, benötigt man die Invarianten von zweiblättrigen Überlagerungen. Es gilt (z.B. [Ma98] Prop. 3.7), da wir glatte Modelle für S_2 und S_3 verwenden:

$$\chi(\mathcal{O}_{S_3}) = 2\chi(\mathcal{O}_{S_2}) - \frac{1}{2}(\mathcal{L}, K + \mathcal{L}),$$

wobei $\mathcal{L}$ das Geradenbündel auf S_2 ist, dessen Quadrat der Verzweigungsdivisor D ist (siehe Abschnitt A.2). D besteht genau aus den 8 Kurven mit Selbstschnitt (-2) in jeder hyperelliptischen Faser. Also ist $D^2 = -16H$ und $(D \cdot K) = 0$ und damit

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{O}_{S_2}) &= (\chi(\mathcal{O}_{S_3}) + 2H)/2 \\ &= 2(g(X(nd)) - 1) + \tfrac{3}{2}H + (n^3 - n)d\Delta_d \end{aligned}$$

Da $X(nd) \to X(d)$ nur über Punkten mit stabilen Fasern verzweigt, ist

$$\chi(\mathcal{O}_{S(A,d)}) = 2(g(X(d)) - 1) + \frac{3}{2}h + d\Delta_d.$$

Die Noetherformel liefert dann noch die Behauptung über $K^2_{S(A,d)}$. □

Bemerkung 4.2.15. Unter Verwendung der Formeln

$$K^2_{S(A,d)/X(d)} = K^2_{S(A,d)} - 16(g(X(d)) - 1)$$

und

$$\deg h_*\omega_{S(A,d)/X(d)} = \chi(\mathcal{O}_{S(A,d)}) - 2(g(X(d)) - 1)$$

erhält man aus obigen Invarianten für $S(A,d)$ eine Steigung

$$\lambda(A,d) = \frac{21d - 51}{7d - 18}$$

ab.

Wir fassen nun, der Vollständigkeit halber, die Aussagen über Fasern und Invarianten im Fall $g = 2$ von Xiao ([Xi85] Kap. 3) hier kurz zusammen.

Satz 4.2.16. *Für $g = 2$ ist $s(d) = s(A, d)$ unabhängig von A. Genauer gilt*

$$\begin{array}{lclcl} s(d) & = & (5d-6)\Delta_d & & \\ c_2(S(A,d)) & = & s(d)+t(d)+4g(X(d))-4 & = & (9d-18)\Delta_d \\ \chi(\mathcal{O}_{S(A,d)}) & = & 2g(X(d))-2+\frac{1}{2}t(d) & = & (2d-6)\Delta_d \\ K^2_{S(A,d)} & = & 6\chi(\mathcal{O}_{S(A,d)})+3g(X(d))-3 & = & (15d-54)\Delta_d \end{array}$$

Die singulären Fasern sind elliptische Kurven mit einem Doppelpunkt über den Punkten mit einer eigentlichen, aber reduziblen Jacobischen oder zwei elliptische Kurven, die sich normal überkreuzen über den Spitzen.

Beweisidee: Zunächst zum Beweis von Theorem 4.2.2. Ausgehend von der Familie $j'(A, d)$ erhält man die Familie von Kurven $h'(A, d)$ als Familie der Polarisierungsdivisoren von $J(A, d)$. Damit entfällt das Torelli-Problem, denn es ist global $\underline{\mathrm{Jac}}_{S(A,d)/X(d)} \cong J(A, d)$. Der Nachweis der Prototypeigenschaft geht dann analog zu oben. Da bereits $S(A, d) \to X(d)$ den richtigen Fixanteil hat, ist der Prototyp auch gut.
Die singulären Fasern über den Spitzen erkennt man anhand ihrer Monodromie und der Liste in [NU73]. Mit Polarisierung reduzible Fasern müssen hier auftreten, denn für $g = 2$ ist diese Untervarietät ein Divisor. Deren Anzahl kann man bestimmen, wenn man verwendet, dass $S(A, d)$ eine zweiblättrige Überlagerung einer Regelfläche ist. □

4.2.2 Maximal irreguläre Faserungen mit $g = 3$ und $d = 2$

Im Falle eines assoziierten Grades $d = 2$ sind bei maximal irregulären Faserungen sowohl hyperelliptische als auch nicht-hyperelliptische generische Fasern möglich. Wir nennen solche Flächen kurz *(nicht-)hyperelliptisch gefasert*. Die hyperelliptischen (aber nicht nur solche) haben (siehe Lemma 4.2.4) als Albanese-Bild ein Produkt. Der Modulraum zerfällt also in die Komponenten mit einem Produkt als Albanese-Bild (die alle isotrivialen und hyperelliptischen Faserungen enthalten) und die Komponenten, für die $B \to X(d)$ surjektiv ist.
Anders gesagt: Maximal irreguläre Faserungen mit $g = 3$ haben einen Albanese-Grad $\gamma = 1$ oder $\gamma = 2$. $\gamma = 2$ ist zu 'produktisogen' äquivalent

und impliziert $d = 2$. $d \geq 3$ impliziert $\gamma = 1$. Und bei $d = 2$ kommt, siehe unten, auch $\gamma = 1$ vor.

Die Struktur des Modulraums im Fall $\gamma = 2$ ist also eine Folge von Theorem 3.3.3:

Korollar 4.2.17. *Die Komponenten des Modulraums für maximal irreguläre Faserungen mit $g = 3$, $d = 2$ und $\gamma = 2$ sind isomorph zu $M_g^G \times M_{g_2}^G$ oder $(M_g^G \times M_g^G)/G$, wobei $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist und das Geschlecht g_2 sowie der topologische Typ der G-Aktionen wie in Abschnitt 3.3 durch die Fundamentalgruppe der Fläche bestimmt wird. Der zweite Fall tritt auf, wenn die beiden Faserungen nicht unterscheidbar sind.*

Im Fall $\gamma = 1$ und $d = 2$ geht die Konstruktion des Prototyps nicht wie für $d \geq 3$ mangels eines *feinen* Modulraums wie in Theorem 4.1.9. Wir zeigen im Folgenden, dass es solche Flächen gibt. Auf die induzierte Abbildung der Basis nach $X(2)$ kommen wir am Ende von Abschnitt 4.3 zurück.
Sei $\Gamma_S = \Gamma(2)_S \cap \Gamma(3)$. Mit dem gleichen Argument wie vor Lemma 4.2.10 induziert die universelle Famile $J_{\Gamma_S} \to X'_{\Gamma_S} = \mathfrak{h}/\Gamma_S$ einen Morphismus $m'_2 : X'_{\Gamma_S} \to A_3^{[3]}$.

Lemma 4.2.18. *Das Bild von m'_2 ist für kein A im hyperelliptischen Lokus enthalten.*

Beweis: Andernfalls müsste man wegen $\gamma = 1$ eine hyperelliptische Kurve in der abelschen Fläche deformieren können. Dies geht wie in Lemma 4.2.10 nicht, denn dort wurde nicht $d \geq 3$ sondern nur die relative Dimension 1 ausgenutzt. □

Korollar 4.2.19. *Es gibt maximal irreguläre Faserungen von Typ $(3, b)$ mit $d = 2$ und $\gamma = 1$. Genauer gibt es für jedes S wie oben eine Fläche*

$$h(A, 2)_S : S(A, 2)_S \to \mathbb{P}^1$$

mit folgender Eigenschaft:
Zu jeder maximal irregulär gefaserten Fläche vom allgemeinen Typ $X \to B \to T \in \mathfrak{S}_{g,b}(T)$ gibt es genau einen Morphismus $\varphi : B \to \mathbb{P}^1$ und ein S, sodass X das kanonische Modell des Pullbacks von $h(A, 2)_S$ unter φ ist.

Beweis: In Anbetracht des vorangehenden Lemmas genügt es, wie im Beweis zu Theorem 4.2.3, aus X'_{Γ_S} die hyperelliptischen Punkte zu entfernen (mit zwei Strichen bezeichnet), die Torelli-Variation 1.3.16 anzuwenden und dann über die universelle Familie über $M_3^{[3]}$ nach $M_3^{[3]} \times_{V_3^{[3]}} X''_{\Gamma_S}$ zurückzuziehen. Wenn gezeigt ist, dass man die abelschen Schemata $j'(A,2)$ anhand ihrer Monodromie auseinanderhalten kann, geht der Rest des Beweises wie in jenem Theorem.
Wir können eine Spitze durch Konjugation in $SL_2(\mathbb{Z})$ ohne Einschränkung nach ∞ verlegen. Es treten folgende zwei Fälle für den Erzeuger des Stabilisators von ∞ bzw. für die Monodromiematrix bezüglich eines Weges γ um ∞ auf:

$$\mathrm{Stab}_{\Gamma(2)_S}(\infty) = \langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle \qquad M(\gamma) = I_6 + E_{3,6}$$

$$\mathrm{Stab}_{\Gamma(2)_S}(\infty) = \langle \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rangle \qquad M(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Diese Matrizen sind nicht in $Sp(3,\mathbb{Z})$ konjugiert, und das ist die Behauptung. $\square$.

In Analogie zu den Methoden für $d \geq 3$ kann man auch hier die Invarianten dieser Flächen bestimmen.

4.2.3 Maximal irreguläre Faserungen mit $g \geq 4$

Moral dieses Abschnittes ist, dass wenn man das hier auftretende 'Schottky-Problem' gelöst hat, fast alles genau wie für $g = 3$ geht.

Theorem 4.2.20. *Es gibt eine maximal irregulär gefaserte Fläche vom Geschlecht $g \geq 4$ und $d \geq 3$ genau dann, wenn das Bild von m_A (siehe Lemma 4.1.12) im Schottky-Lokus $\mathcal{S}_g$ landet.*
In diesem Fall gibt es einen Prototyp $S_g(A,d) \to X(d)$ über einer Modulkurve.

Beweis: Zunächst sieht man, dass die generische Faser einer solchen Faserung nicht hyperelliptisch ist, denn unter dem Albanese-Morphismus müsste in diesem Fall eine Faser auf eine Kurve vom Geschlecht $g-1$ abgebildet werden. Ist das Bild von m_A in $\mathcal{S}_g$, so geht der Beweis des Theorems 4.2.3 durch und man erhält den gesuchten Prototyp. Die Notwendigkeit dieser Bedingung ist klar. □

Bemerkung 4.2.21. Die Fasern solcher Flächen sind vermutlich semistabil, aber der Beweis von Lemma 4.2.10 verallgemeinert sich nicht direkt, sodass Quotienten von hyperellitpischen Fasern nach der Involution ebenfalls auftreten könnten.

Bemerkung 4.2.22. Pirola ([Pi89]) konstruiert mit Hilfe einer geeigneten dreiblättrigen Überlagerung einer elliptischen Kurve für A in einem zweidimensionalen Unterschema von $\mathcal{A}_3$ maximal irreguläre Faserungen mit $g = 4$ und A als Fixanteil. Es wäre interessant zu wissen, ob man aus der Konstruktion von Abschnitt 4.1 ablesen kann, welche A als Fixanteil bei welchem d auftreten können und ob man die Existenzfrage für $g \geq 5$ damit beantworten kann.

4.3 Modulräume für irregulär gefaserte Flächen

Mit Hilfe der natürlichen Transformation 'Fläche nach Basiskurve' und den bisherigen Resultaten können wir nun den Modulraum für maximal irregulär gefaserte Flächen beschreiben. Dazu fassen wir die Morphismen $B \to X(d)$ der Basis auf die Modulkurve in Familien zusammen. Dies führt zu einem Hurwitz-Schema (wenn man unter diesem Begriff nicht 'galoissch' oder 'einfache Verzweigung' versteht) oder einem einfachen Fall eines Modulraums für stabile Abbildungen.

Sei D eine feste Kurve und $\mathfrak{C}_b(D,m)$ folgender Überlagerungsfunktor:

$$\mathfrak{C}_b(D,m)(T) = \{(B, \varphi : B \to D) \,\mathrm{mit}\, B \in \mathfrak{C}_b(T),\, \deg(\varphi) = m\}.$$

Dieser ist ein Unterfunktor des Funktors für stabile Abbildungen, und besitzt nach [FuPe95] einen groben Modulraum $M_b(D,m) \subset \overline{M_b}(D,m)$. Diesem kann man nach [FaPe02] den Verzweigungsdivisor zuordnen und erhält somit einen Morphismus

$$M_b(D,m) \to \mathrm{Sym}^r(D),$$

wobei $r = 2b - 2 - m(2g(D) - 2)$. Dieser Morphismus ist endlich und deswegen ist

$$r = \dim M_b(D, m).$$

Bezeichnung 4.3.1. *Seien $\mathcal{A}^B_{g-1,\delta}(\cdot)$ die Isomorphieklassen von* brauchbaren *abelschen Varietäten, d.h. derjenigen abelschen Varietäten, die als Fixanteil einer Familie maximal irregulär gefaserter Flächen vom Geschlecht g auftreten können. Sei $A^B_{g-1,\delta}$ die zugehörige Teilmenge von $A_{g-1,\delta}$, versehen mit einer geeigneten Unterschemastruktur. Dies heißt nach (Th. 4.2.2, Th. 4.2.3 und Bem. 4.2.22) im Einzelnen:*

- *$A^B_{1,\delta} = A_{1,\delta}$ ist der ganze Modulraum.*
- *$A^B_{2,\delta}$ ist der offene, dichte Teil, der keine eindimensionalen, prinzipalpolarisierten abelschen Untervarietäten besitzt.*
- *Die Bestimmung von $A^B_{g-1,\delta}$ ist ein Schottky-Problem. Bisher ist nur klar, dass $A^B_{3,\delta} \neq \emptyset$ ist.*

Wir bezeichnen die Einschränkung der Familie $j'(d)$ (siehe Ende des Abschnitts 4.1) auf die brauchbaren abelschen Varietäten ebenfalls mit $j'(d)$. Naheliegenderweise sei $(A^{[n]}_{g-1,\delta})^B$ das Urbild der brauchbaren abelschen Varietäten im feinen Modulraum mit Levelstruktur.

Analog zum Beweis von Theorem 4.2.3 liefert der Satz 1.3.16 eine glatte Familie von Kurven

$$h''(d) : S''(d) \to U$$

über einem offenen Teil $U \subset X(d) \times (A^{[n]}_{g-1,\delta})^B$, der in jeder Faser dicht liegt, sodass die Jacobische lokal zu $j'(d)|_U$ isomorph ist. Die relative kanonische Garbe der Familie von Kurven liefert eine projektive Einbettung in einen $\mathbb{P}^N_U$. Sei $S(d)$ der Abschluss des Bildes in $\mathbb{P}^N_{X(d)\times(A^{[n]}_{g-1,\delta})^B}$.

Lemma 4.3.2. *Mit obiger Konstruktion erhält man einen flachen Morphismus*

$$h(d) : S(d) \to X(d) \times (A^{[n]}_{g-1,\delta})^0,$$

dessen Faser über $(A, \alpha) \in (A^{[n]}_{g-1,\delta})^B(\mathbb{C})$ gerade $h(A, d)$ ist.

Beweis: Die Eigenschaften der Fasern folgen aus der Konstruktion. Insbesondere ist das Hilbertpolynom der Fasern von $h(d)$ konstant, da es dies in $h(A,d)$ (aufgrund der eindimensionalen Basis) und eingeschränkt zu $h''(d)$ ist. Daraus folgt dann die Flachheit von $h(d)$ (z.B. [Ha77] Th. III.9.9). $\square$

Damit haben wir endgültig alles beisammen, was wir für folgende Strukturaussagen über die Modulräume benötigen.

Theorem 4.3.3. *Der Modulraum für maximal irregulär gefaserte Flächen vom Typ $(2,b)$ und assoziiertem Grad $d \geq 3$ zerfällt in Komponenten zum Grad m des von einer solchen Faserung $X \to B$ induzierten Morphismus $B \to X(d)$. Eine solche Komponente ist isomorph zu*

$$M_b(X(d),m) \times A_1,$$

also dem Produkt eines Modulraums für stabile Abbildungen und einem Modulraum für abelsche Schemata. Sie hat also die Dimension

$$2b - 2 - m(2g(X(d)) - 2) + 1 = r + 1.$$

Beweis: Es ist natürlich $A^B_{1,d} \cong A_1$, weswegen im zweiten Faktor in der Tat die brauchbaren abelschen Varietäten stehen. Wir führen den ersten Teil des Beweises für allgemeines g, um diesen im Folgenden nochmal zu vewenden.
Rekapitulieren wir, dass nach Lemma 2.3.2 jede Familie solcher gefaserter Flächen $X \to T$ eine gefaserte Familie ist. Es gibt also eine Familie von Kurven $B \to T$, über die $X \to T$ faktorisiert. Diese Faserung induziert aufgrund ihres Fixanteils einen Morphismus $\psi : T \to A^B_{g-1,\delta}$. Nach einem étalen Basiswechsel $T' \to T$ können wir annehmen, dass der Fixanteil eine Levelstruktur hat. Es sei also $\psi' : T' \to (A^{[n]}_{g-1,\delta})^B$ der induzierte Morphismus. Der in Zusammenhang mit der Definition des Fixanteils konstruierte Morphismus $p : \underline{\mathrm{Jac}}_{X^0/B^0} \to A_{B^0} = A \times_T B^0$ liefert nach Pullback auf T' aufgrund des Lemmas 4.1.11 einen Morphismus $\varphi' : B^0 \times_T T' \to X'(d)$. Dieser setzt sich nach $B \times_T T'$ fort. Aufgrund der universellen Eigenschaft von $j'(d)$ ist φ eindeutig und passt daher mit den kanonischen Abstiegsdaten von $B \times_T T'$ zusammen. Insbesondere steigt φ' zu $\varphi : B \to X(d)$ ab. Damit gibt es eine natürliche Transformation des entsprechenden Unterfunktors von $\mathfrak{S}_{g,b}$ in den Punktfunktor von $M_b(X(d),m) \times A_{g-1,\delta}$.
Umgekehrt gibt es im Fall $g = 2$ zu jedem komplex-wertigen Punkt

$$(\varphi, a) \in (M_b(X(d),m) \times A_{1,\delta})(\mathbb{C})$$

aufgrund der Eigenschaft 'guter Prototyp' eine gefaserte Fläche, nämlich das Pullback von $S(A,d)$ unter dem Basiswechsel φ. Sind zwei solche Flächen $h_i : X_i \to B_i$ zu (φ_i, a_i) via Λ zueinander isomorph, so sind notwendigerweise die Fixanteile isomorph. Außerdem liefert die Eindeutigkeit der Faserung einen Isomorphismus λ der Basiskurven, der mit Λ und den h_i kommutiert. Es ist noch zu zeigen, dass $\varphi_2 \circ \lambda = \varphi_1$ ist. Wäre dem an einem Punkt $P \in X(d)$ nicht so, dann betrachte man die Jacobische der Faser über einem Urbild von P in B und man erhält einen Widerspruch nach Verketten von φ_i mit m_A.
Sei allgemeiner $A/T \in \mathcal{A}_{1,\delta}^{[n]}(T)$ und $\varphi \in \mathfrak{C}_b(X(d),m)(T)$ gegeben. Das davon induzierte Pullback von $S(d)$ ist eine flache Familie von Flächen. Bläst man die in dieser Familie enthaltenen (-1)-Kurven noch nieder und geht zum kanonischen Modell über, so hat man das gesuchte Element von $\mathfrak{S}_{2,b}(T)$. Damit haben wir gezeigt, dass $M_b(X(d),m) \times A_{1,\delta}^{[n]}$ den Funktor $\mathfrak{S}_{2,b}^{[n]}$ grob darstellt ist, der Flächen in $\mathfrak{S}_{2,b}(\cdot)$ zusammen mit einer Levelstruktur des Fixanteils der Faserung parametrisiert. Da der Morphismus $A_{1,\delta}^{[n]} \to A_{1,\delta}$ gerade die Quotientenabbildung nach der zur Levelstruktur gehörigen Gruppe ist, folgt die noch verbleibende Maximalitätsbedingung des Modulraums aus der universellen Eigenschaft des Quotienten. □

Bemerkung 4.3.4. Aus obigem Beweis entnimmt man, dass man auch für größere g eine natürliche Transformation des Funktors für maximal irreguläre Faserungen

$$\eta : \mathfrak{S}_{g,b} \to \mathfrak{C}_b(X(d),m) \times \mathcal{A}_{g-1,\delta}^{B}$$

und somit einen Morphismus

$$\eta : N_{g,b} \to M_b(X(d),m) \times A_{g-1,\delta}^{B}$$

hat, sofern jede Familie von Flächen eine gefaserte ist.

Theorem 4.3.5. *Für $g = 3$ und $d \geq 3$ ist η eine Immersion, für $g = 3$ und $d = 2$ ist η eine 4-blättrige Überlagerung.*

Beweis: Die Familien sind nach Lemma 2.3.2 gefaserte Familien und die Existenz eines Prototypen für $d \geq 3$ impliziert die Injektivität von η in diesem Fall.
Die Existenz der natürliche Transformation

$$\mathfrak{S}_{g,b} \to \mathfrak{C}_b(X(d),m) \times \mathcal{A}_{g-1,\delta}^{B}$$

wird nach obigem Beweis von der Grobheit des Modulraums im Fall $d = 2$ nicht gefährdet. Und nach Korollar 4.2.19 hat jeder Punkt

$$(\varphi, A)(M_b(X(d), m) \times A_{1,\delta})(\mathbb{C})$$

in $N_{g,b}$ höchstens 4 Urbilder, nämlich die Pullbacks der Familien $h(A, 2)_S$ unter φ. Diese sind aufgrund der Monodromieüberlegung in jenem Korollar für generisches φ auch paarweise verschieden. $\square$

Anhang A

Deformationstheorie

A.1 Deformationen eines Morphismus

Ziel dieses Abschnitts ist es zum Einen, den in der Literatur als Standardkriterium für Glattheit bekannten Satz A.1.8 zu beweisen, oder besser gesagt alle dafür notwendigen Literaturzitate zusammenzutragen und gegebenenfalls in die algebraische Kategorie (Schemata über lokalen artinschen Ringen anstelle komplexer Raumkeime) zu übersetzen. Diesen Satz findet man zwar ursprünglich schon bei Horikawa, aber dessen Einschränkung auf glattes X reicht uns nicht aus. Beweise sind dabei nicht notwendig für die zentralen Aussagen mitgeliefert, sondern vielmehr für diejenigen, die (oftmals, weil einfach) sparsam abgehandelt werden. Zum Anderen wollen wir diesen in der Situation von gefaserten Flächen anwenden (Satz A.1.3).

Wir verwenden in diesem Abschnitt folgende Bezeichnungen:

$$\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[rr, "i_X"] \arrow[dr, "h_0"] \arrow[dd, "f_0"'] & & X \arrow[dr, "h"] \arrow[dd, "f"] & \\
& Y_0 \arrow[rr, "i_Y"] \arrow[dl, "g_0"] & & Y \arrow[dl, "g"] \\
T_0 \arrow[rr, "i"] & & T &
\end{tikzcd},$$

wobei $T_0 = \operatorname{Spec}\mathbb{C}$, und f_0, g_0, f und g eigentliche Morphismen und alles Schemata über $\mathbb{C}$ sind. T sei stets Spektrum eines vollständigen lokalen Rings.

Definition A.1.1. *Eine* Deformation *von X_0 über T mit ausgezeichnetem Punkt T_0 ist ein flacher Morphismus $f : X \to T$, der auf T_0 eingeschränkt*

mit f_0 übereinstimmt. Mit $\mathrm{Def}_{X_0}(T)$ *bezeichnet man die Menge der Isomorphieklassen von Deformationen von X_0 über T.*
Eine Deformation von $h_0 : X_0 \to Y_0$ über T besteht aus Deformationen X und Y über T von X_0 bzw. Y_0, sowie einem T-Morphismus $h : X \to Y$, der über T_0 mit h_0 übereinstimmt. Mit $\mathrm{Def}_{h_0}(T)$ *bezeichnet man die Menge der Isomorphieklassen (mit dem naheliegenden Isomorphiebegriff) von Deformationen von h_0. Mit* $\mathrm{Def}_{X_0/Y_0}(T)$ *bezeichnet man die Menge der Isomorphieklassen von Deformationen von h_0 über T, die Y_0 trivial deformieren.*

Bemerkung A.1.2. Ist Y_0 glatt, so sind auch alle Deformationen davon glatt, da bei einem flachen Morphismus der Lokus der glatten Fasern offen ist.

Ziel dieses Abschnitts ist es, folgenden, gut bekannten Satz zu zeigen:

Satz A.1.3. *Ist $f_0 : X_0 \to \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}$ eine Faserfläche zu $N_{g,b}$, $b \geq 2$ mit Faserung $h_0 : X_0 \to Y_0$, so ist für alle T, Spektrum eines vollständigen lokalen Ringes, die Abbildung*

$$\varphi : \mathrm{Def}_{h_0}(T) \to \mathrm{Def}_{X_0}(T)$$

von darstellbaren Funktoren glatt, insbesondere surjektiv.

Zum Beweis benötigen wir einige Vorbereitungen, darunter folgendes Glattheitskriterium:

Satz A.1.4. *Ein Morphismus $\phi : V \to W$ von Schemata über $\mathbb{C}$ ist genau dann glatt, wenn es für jede artinsche $\mathbb{C}$-Algebra R', jeden Morphismus $\psi : \mathrm{Spec}\,R' \to W$, jedes Ideal $I \lhd R'$, das $\mathfrak{m}I = 0$ erfüllt, und jeden Morphismus $\Lambda_0 : \mathrm{Spec}\,R'/I \to V$ eine Fortsetzung $\Lambda : \mathrm{Spec}\,R' \to V$ gibt, sodass $\phi \circ \Lambda = \psi$ ist. ([EGA] IV, 17.14.2)*

Wir bezeichnen so einen artinschen Ring R' auch als *infinitesimale Erweiterung* von $R := R'/I$ durch den R-Modul I. Es sind dies gerade die Erweiterungen durch R-Moduln der Form $I = i_*(I_0)$ für einen $\mathbb{C}$-Modul I_0.

Wir fassen im Folgenden einige Definitionen und Sätze der Tangentialkohomologie aus [Fl79] (oder auch [Bin87]) zusammen.
Zu jedem Morphismus $h_0 : X_0 \to Y_0$ gibt es einen nach rechts beschränkten

Komplex $\mathcal{L}^\bullet_{X_0/Y_0}$ von $\mathcal{O}_{X_0}$-Moduln, den *Kotangentialkomplex*. Dieser ist bis auf Quasiisomorphie eindeutig und stimmt für einen glatten Morphismus mit $\Omega^1_{X_0/Y_0}$ überein. Wir gehen hier nicht auf dessen Definition ein. Seine Existenzberechtigung ist folgender Zusammenhang mit Deformationsfunktoren, den wir ohne Beweis zitieren.
Für jeden $\mathcal{O}_{X_0}$-Modul $\mathcal{M}_0$ definiert man *Tangentialfunktoren*

$$T^i(X_0/Y_0, \mathcal{M}_0) := \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}^\bullet_{X_0/Y_0}, \mathcal{M}_0).$$

Dabei ist hier wie im Folgenden $\mathrm{Ext}^i(\cdot,\cdot)$ die Ableitung des Hom-Funktors auf Komplexen, d. h.

$$\mathrm{Hom}^p(M^\bullet, N^\bullet) = \coprod_n \mathrm{Hom}(M^n, N^{n+p}).$$

Für $T^i(X_0/\mathbb{C}, \mathcal{M}_0)$ schreibt man kurz $T^i(X_0, \mathcal{M}_0)$ und $\mathcal{M}_0 = \mathcal{O}_{X_0}$ lässt man weg.
Sei T' eine Erweiterung von T durch den $\mathcal{O}_T$-Modul $\mathcal{N}$. Dadurch wird ein Element von $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_T, \mathcal{N})$ bestimmt, das wir ebenfalls mit T' bezeichnen.

Satz A.1.5. *i) T^1 ist der Tangentialraum an* Def*, d.h. es gilt*

$$T^1(X_0/Y_0) = \mathrm{Def}_{X_0/Y_0}(\mathrm{Spec}\, k[\varepsilon]/\varepsilon^2).$$

ii) T^2 beschreibt die Obstruktion, eine Deformation $\delta \in \mathrm{Def}_{X/Y}(T)$ auszudehnen, d.h. es gibt einen Homomorphismus

$$\varphi_\delta : \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_T, \mathcal{N}) \to T^2(X/Y, f^*\mathcal{N}),$$

sodass δ sich genau dann nach T' ausdehnen lässt, wenn $\varphi_\delta(T') = 0$ ist. Analoge Aussagen gelten für $T^i(X_0)$ und $T^i(Y_0)$.

Lemma A.1.6. *Ist $T' \to T$ eine infinitesimale Erweiterung durch den $\mathcal{O}_S$-Modul $\mathcal{N} = i_*\mathcal{N}_0$, so gilt für alle i*

$$T^i(X/Y, f^*\mathcal{N}) = T^i(X_0/Y_0) \otimes_{\mathcal{O}_{T_0}} \mathcal{N}_0.$$

Beweis: Da Tensorieren über einem Körper exakt ist, lautet die Aussage übersetzt

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}^\bullet_{X/Y}, f^*\, i_*\, \mathcal{N}_0) = \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_{X_0}}(i_X^*\, \mathcal{L}^\bullet_{X/Y}, f_0^*\, \mathcal{N}_0)$$

oder mit der Bezeichnung $\mathcal{P} := f_0^* \mathcal{N}_0$ und unter Berücksichtigung von $f^* i_*(\cdot) = i_{X*} f_0^*(\cdot)$

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}^\bullet_{X/Y}, i_{X*}(\mathcal{P})) = \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_{X_0}}(i_{X*}\mathcal{L}^\bullet_{X/Y}, \mathcal{P}).$$

Da i_{X*} exakt ist, stehen links die Ableitungen von $\mathrm{Hom}(\mathcal{L}^\bullet_{X/Y}, i_{X*}(\cdot))$, was wegen Adjungiertheit nichts anderes ist als die Ableitungen des Funktors $\mathrm{Hom}(i_X^* \mathcal{L}^\bullet_{X/Y}, \cdot)$, und die stehen auf der rechten Seite. □

Zur Untersuchung der Deformationen eines Morphismus benötigt man noch eine relative Version des Kotangentialkomplexes. Sei dazu $\mathcal{C}$ die Kategorie, deren Objekte die Tripel

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) = \{(\mathcal{M}_0, \mathcal{N}_0, \phi) \,|\, \mathcal{M}_0 \in \mathcal{O}_{X_0}\text{-Mod}, \mathcal{N}_0 \in \mathcal{O}_{Y_0}\text{-Mod}, \phi : h_0^* \mathcal{N}_0 \to \mathcal{M}_0\}$$

sind. In $\mathrm{Kom}(\mathcal{C})$ gibt es ein Tripel $\mathcal{L}^\bullet_{h_0}$, das für glattes h_0 zu dem Tripel $(\Omega^1_{X_0/T_0}, \Omega^1_{Y_0/T_0}, \mathrm{kan})$ quasiisomorph ist und sodass

$$T^i(h_0, \mathcal{N}_0) := \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}}(\mathcal{L}^\bullet_{h_0}, (h_0^* \mathcal{N}_0, \mathcal{N}_0, \mathrm{id}))$$

den üblichen Eigenschaften von Tangentialfunktoren wie in Satz A.1.5 genügt. Lemma A.1.6 gilt hier analog.

Für den Nachweis der Glattheit genügen, wie gesehen, infinitesimale Erweiterungen und wir können uns deshalb und aufgrund des obigen Satzes auf Aussagen über die Tangentialfunktoren mit Koeffizienten in $\mathcal{O}_{X_0}$ bzw. $\mathcal{O}_{Y_0}$ beschänken. Andere Koeffizienten treten nur aus beweistechnischen Gründen auf, sind jedoch durchgehend $\mathcal{O}_{X_0}$– bzw. $\mathcal{O}_{Y_0}$–Moduln, weswegen die Nullen im Index von nun ab fortgelassen werden.
Im Folgenden sei $\mathbb{L}h^* : D(\mathcal{O}_Y - \mathrm{Mod}) \to D(\mathcal{O}_X - \mathrm{Mod})$ der linksabgeleitete Funktor von h^* auf den derivierten Kategorien und adjungiert hierzu $\mathbb{R}h_* : D((\mathcal{O}_X - \mathrm{Mod})) \to D(\mathcal{O}_Y - \mathrm{Mod})$.

Satz A.1.7. *Es gibt eine lange exakte Sequenz*

$$\ldots \to T^i(h) \to T^i(X) \oplus T^i(Y) \to \mathrm{Ext}^i(\mathbb{L}\mathcal{L}^\bullet_Y, \mathcal{O}^\bullet_X) \to T^{i+1}(h) \to \ldots.$$

Die Morphismen

$$\gamma_i : T^i(Y) \to \mathrm{Ext}^i(\mathbb{L}h^* \mathcal{L}^\bullet_Y, \mathcal{O}_X) = \mathrm{Ext}^i(\mathcal{L}^\bullet_Y, \mathbb{R}h_* \mathcal{O}_X)$$

kommen dabei von den Eckenmorphismen der Spektralsequenz zur Verkettung der Funktoren h_* und $\mathrm{Hom}(\mathcal{L}^\bullet_X, \cdot)$ her.

Beweisskizze: Wir verwenden, dass für geeignete Vertreter der Kotangentialkomplexe $\mathcal{L}_h^\bullet = (\mathcal{L}_X^\bullet, \mathcal{L}_Y^\bullet, \nu)$ ist ([Bin87] Satz III.6.1.6), wobei ν von h induziert ist. Falls bei geeigneter Vertreterwahl nun zudem

$$0 \longrightarrow h^*\mathcal{L}_{Y/T}^\bullet \xrightarrow{\nu} \mathcal{L}_{X/T}^\bullet \xrightarrow{p} \mathcal{L}_{X/Y}^\bullet \longrightarrow 0$$

exakt ist ([Bin87] III.5.19), so ist für alle Tripel $T^\bullet = (M^\bullet, N^\bullet, \phi) \in \mathrm{Kom}\,(\mathcal{C})$ von Komplexen in $\mathcal{C}$ die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{L}_h^\bullet, T^\bullet) \longrightarrow \oplus_{X,Y}\mathrm{Hom}^\bullet \longrightarrow \mathrm{Hom}^\bullet(h^*\mathcal{L}_Y^\bullet, M^\bullet) \longrightarrow 0$$

exakt. Dabei ist $\oplus_{X,Y}\mathrm{Hom}^\bullet$ eine Kurzschreibweise für $\mathrm{Hom}^\bullet(\mathcal{L}_X^\bullet, M^\bullet) \oplus \mathrm{Hom}^\bullet(\mathcal{L}_Y^\bullet, N^\bullet)$ und der erste Morphismus von den beiden Vergissfunktoren induziert. Der zweite Morphismus ist die Differenz folgender Abbildungen auf den Summanden: Auf dem ersten Summanden ist es die Komposition mit ν und auf dem zweiten die Komposition mit ϕ des Pullbacks unter h^*. Nehmen wir für T eine injektive Auflösung von $(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y, h^*)$, so ist $M^\bullet$ eine Auflösung von $\mathcal{O}_X$ und $N^\bullet$ eine quasiinjektive Auflösung von $\mathcal{O}_Y$. Dies bedeutet, dass $N^i = h_*J \oplus K$ ist, wobei K ein injektiver $\mathcal{O}_Y$-Modul und J ein injektiver $\mathcal{O}_X$-Modul ist. Damit ist $H^i(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{L}_h^\bullet, T^\bullet)) = T^i(h)$, $H^i(\mathrm{Hom}^\bullet(\mathcal{L}_X^\bullet, M^\bullet)) = T^i(X)$ und $H^i(\mathrm{Hom}^\bullet(h^*\mathcal{L}_Y^\bullet, M^\bullet)) = \mathrm{Ext}^i(\mathbb{L}\mathcal{L}_Y^\bullet, \mathcal{O}_X^\bullet)$. Wenn wir für $\mathcal{L}_Y^\bullet$ einen Komplex aus *speziellen Elementen* ([Bin87] I.12.5) nehmen, so ist auch $H^i(\mathrm{Hom}^\bullet(\mathcal{L}_Y^\bullet, N^\bullet)) = T^i(Y)$. Es bleibt noch zu überprüfen, dass dies mit Rücksicht auf obige Verteterwahlen möglich ist. Siehe dazu [Bin87] Prop. I.12.9 und I.12.10.
Wir haben den Beweis der exakten Sequenz auf die technischen Aussagen über die Existenz geeigneter Vertreter der Kotangentialkomplexe zurückgespielt.

Die zweite Aussage ist klar nach obiger Definition der Abbildung auf dem zweiten Summanden auf Komplex-Niveau und der Definition der Eckenmorphismen. □

Satz A.1.8. *(Standardkriterium für Glattheit) Sind die Abbildungen $\alpha_i : T^i(h_0) \to T^i(X_0)$ in der exakten Sequenz von Satz A.1.7 für $i = 1$ surjektiv und für $i = 2$ injektiv, dann ist für alle T*

$$\mathrm{Def}_{h_0}(T) \to \mathrm{Def}_{X_0}(T)$$

glatt. Ist α_1 bijektiv, so ist es sogar ein Isomophismus.

Beweisskizze: Nach Satz A.1.4 ist für eine infinitesimale Erweiterung $T' \to T$ zu gegebenem $h \in \mathrm{Def}_{h_0}(T)$ und $X \in \mathrm{Def}_{X_0}(T')$ mit gleichem Bild in $\mathrm{Def}_{X_0}(T)$ eine Deformation h' über T' zu finden, die h fortsetzt. Die Obstruktion h zu h' fortzusetzen, verschwindet, da X fortsetzbar und α_2 injektiv ist. Dieses h' wird a priori nicht auf X' abgebildet und man benötigt die Surjektivität von α_1, um h' dahingehend zu modifizieren. Details findet man in [AS81]. $\square$

Beweis von Satz A.1.3: Da X_0 und Y_0 eine Fläche bzw. Kurve vom allgemeinen Typ sind, haben sie endliche Automorphismengruppen, insbesondere keine infinitesimalen Automorphismen, weswegen $T^0(X_0)$ und $T^0(Y_0)$ nach [Fl79] Satz 3.19 verschwinden und nach obiger Sequenz $T^0(h_0)$ ebenfalls. Nach eben diesem Satz bedeutet dies, dass auch h_0 keine infinitesimalen Automorphismen hat, und die versellen Deformationen von X_0 und h_0 (zur Existenz siehe [Fl79] Satz 8.3) nach dem Kriterium von Schlessinger ([Sch68] Th. 2.11 und Lemma 3.8) sogar universell sind, der Deformationsfunktor also darstellbar ist.
Bei einer Faserung ist $f_*(\mathcal{O}_{X_0}) = \mathcal{O}_{Y_0}$ und aus relativer Dualität und einem Satz von Fujita folgt $H^0(R^1 h_{0*}\mathcal{O}_{X_0} \otimes \Omega^\vee_{Y_0/T_0}) = 0$, da Y_0 Geschlecht ≥ 2 hat (siehe z.B. [Ser92] Claim 5.1). Dabei geht auch Charakteristik Null ein. Die kurzen exakten Sequenzen der niedrigen Terme für die Spektralsequenz im Satz A.1.7 implizieren, dass γ_1 bijektiv und γ_2 injektiv ist. Daher sind die Voraussetzungen des Standardkriteriums erfüllt. $\square$

A.2 Deformationen einer abelschen Überlagerung

Für abelsche Überlagerungen sind [Par91] und [FaPa97] die Standardreferenzen. Dieser Abschnitt soll die Bezeichnungen dieser Vorlagen und von [Ma98] zusammenfügen. Er enthält keine neuen Resultate, sondern spezialisiert vielmehr bekannte Ergebnisse in die im Text benötigte Form.

Es sei in diesem Abschnitt $h : X_0 \to Y_0$ eine abelsche Überlagerung zweier Flächen vom Grad n mit Galoisgruppe G und Y_0 zudem eine glatte Fläche. Sei I_G die Menge der Paare (H, ψ), wobei H eine zyklische Untergruppe von G und ψ ein Erzeuger der dualen Gruppe H^* ist. Für $i = (H_i, \psi_i) \in I_G$ und $\chi \in G^*$ sei weiter $0 \leq a^i_\chi < \#H_i$ derart, dass $\psi_i^{a^i_\chi} = \chi|_{H_i}$.

Definition A.2.1. *Ein Morphismus $h : X_0 \to Y_0$ wie oben heißt (G, I)-*

Überlagerung *für eine Teilmenge* $I \subset I_G$, *falls es nichttriviale, effektive Verzweigungsdivisoren* $D_i \subset Y$ *für* $i \in I$ *gibt, die die Trägheitsgruppe* H_i *und den induzierten Charakter* ψ_i *besitzen (siehe [Par91] für Details).*
Die Überlagerung heißt total verzweigt, *falls die Abbildung* $\bigoplus_{i \in I} H_i \to G$ *surjektiv ist.*

Bei solch einer Überlagerung zerlegt sich $h_* \mathcal{O}_X$ in Geradenbündel, die Eigenräume zu den Charakteren von G. Für $\chi \in G^*$ sei L_χ das Inverse des Eigenraums zu χ.

Definition A.2.2. *Die Bündel* L_χ *und* $\mathcal{O}_{Y_0}(D_i)$ *genügen folgender* fundamentalen Beziehung *für alle* $\chi, \chi' \in G^* \setminus 1$*:*

$$L_\chi \otimes L_{\chi'} = L_{\chi\chi'} \otimes \bigotimes_{i \in I} \mathcal{O}_{Y_0}(D_i)^{\varepsilon^i_{\chi,\chi'}},$$

wobei $\varepsilon^i_{\chi,\chi'} = [(a^i_\chi + a^i_{\chi'})/(\#H_i)] \in \{0, 1\}$*. Sie heißen daher* Baudaten *der Überlagerung.*

Diese Bezeichnung rechtfertigt sich dadurch, dass man X_0 aus den Baudaten als Untervarietät der Summe der Totalräume der L_χ wiedergewinnen kann ([Par91]), wie unten im allgemeineren Fall für eine natürliche Deformation der Baudaten beschrieben.

Ist die (G, I)-Überlagerung h zyklisch, so ist $I = (G, \psi)$ einelementig und die fundamentale Beziehung reduziert sich zu

$$L^n_\psi = \mathcal{O}_{Y_0}(D).$$

Die Anzahl der Garben in den Baudaten kann man wie folgt reduzieren: Sei $(e_1, \ldots, e_s)$ eine Basis von G, d.h. G ist die Summe der von den e_i erzeugten zyklischen Gruppen und $\mathrm{ord}(e_i)|\mathrm{ord}(e_{i+1})$. Sei $\chi_1, \ldots, \chi_s \in G^*$ eine Dualbasis, also derart, dass $\chi_i(e_j) = \zeta^{\delta_{ij}}_{\mathrm{ord}(e_j)}$. Wir schreiben kurz a^i_j für $a^i_{\chi_j}$ und definieren schließlich (dies hängt von der Basiswahl in G ab!) für $\chi = \chi_1^{\alpha_i} \cdots \chi_s^{\alpha_s}$

$$q^i_\chi = \left\lfloor \sum_{j=1}^{s} \frac{\alpha_i a^i_j}{\#H_i} \right\rfloor .$$

Definition A.2.3. *Die Bündel L_{χ_j} $(j = 1, \ldots, s)$ zu einer Dualbasis zusammen mit effektiven Divisoren D_i, sodass*

$$L_{\chi_j}^{\mathrm{ord}(\chi_j)} = \bigotimes_{i \in I} \mathcal{O}_{Y_0}(D_i)^{\mathrm{ord}(\chi_j) a_j^i / \# H_i}$$

heißen reduzierte Baudaten *der Überlagerung. Für L_{χ_j} schreibt man kurz L_j.*

Wie der Name suggeriert, kann man die Baudaten aus den reduzierten wiedergewinnen, indem man für $\chi = \chi_1^{\alpha_1} \cdots \chi_s^{\alpha_s}$ definiert:

$$L_\chi = \bigotimes_{j=1}^{s} L_j^{\alpha_j} \otimes \bigotimes_{i \in I} \mathcal{O}_{Y_0}(D_i)^{-q_\chi^i}$$

Satz A.2.4. *([Par91] Satz 3.1) Da Y_0 glatt ist, ist h in jedem Falle flach. Ist h total verzweigt, so ist X genau dann glatt, wenn alle D_i glatt sind und ihre Vereinigung höchstens normale Überkreuzungen besitzt.*

Es sei $S = \{(i, \chi) \in I \times G^* \mid \chi_{|H_i} \neq \psi_i^{-1}\}$ die Menge der Garben, deren Schnitte natürliche Deformationen im Wesentlichen bestimmen. Eine Anmerkung zur Notation: Garben auf einem 'festen' Schema werden in der Regel mit lateinischen Buchstaben bezeichnet, Garben auf einer Familie von Schemata mit kalligraphischen Buchstaben.

Definition und Satz A.2.5. *Eine* natürliche Deformation der Baudaten *von h über $(T, 0)$ ist ein Quintupel $(Y, \mathcal{M}_i, \mathcal{L}_\chi, s_{(i,\chi)}, \varphi_{\chi,\chi'})$, wobei:*

- *$Y \to T$ ist eine Deformation von Y_0 über $(T, 0)$.*
- *Für $i \in I$ und $\chi \in G^*$ sind $\mathcal{M}_i$ und $\mathcal{L}_\chi$ Geradenbündel auf Y, die sich auf Y_0 zu $\mathcal{O}_{Y_0}(D_i)$ und L_χ einschänken.*
- *$\varphi_{\chi,\chi'} : \mathcal{L}_\chi \otimes \mathcal{L}_{\chi'} \to \mathcal{L}_{\chi\chi'} \otimes \bigotimes_{i \in I} \mathcal{O}_Y(D_i)^{\varepsilon^i_{\chi,\chi'}}$ sind Isomorphismen, die sich auf Y_0 zur fundamentalen Beziehung einschränken.*
- *Für $(i, \chi) \in S$ ist $s_{(i,\chi)} \in \Gamma(Y, \mathcal{L}_\chi^{-1} \otimes \mathcal{M}_i)$ ein Schnitt, der für $\chi \neq 1$ den Nullschnitt auf Y_0 fortsetzt und für $\chi = 1$ den Divisor D_i in $\mathcal{M}_i|_{Y_0}$ definiert.*

Eine natürliche Deformation heißt galoissch, *falls* $s_{(i,\chi)} = 0$ *für* $\chi \neq 1$. *Die zugehörigen Funktoren auf der Kategorie der lokalen artinschen Schemata bezeichnen wir mit* Dnat_{X_0} *bzw.* Dgal_{X_0}.

Zu einer natürlichen Deformation der Baudaten gibt es eine bis auf Isomorphie eindeutige Deformation $X \to T$ *von* X_0, *die* zugehörige natürliche Deformation von X_0. *Ein galoissche Deformation der Baudaten wird dabei nach* $\mathrm{Def}^G_{X_0}$ *abgebildet, in den Unterfunktor der Deformationen, die eine Fortsetzung der* G*-Aktion erlauben. Man hat also ein kommutatives Diagramm natürlicher Transformationen:*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Dgal}_{X_0} \arrow[r, "\alpha^G"] \arrow[d] \arrow[dr, "\eta"] & \mathrm{Def}^G_{X_0} \arrow[d] \\ \mathrm{Dnat}_{X_0} \arrow[r, "\alpha"] & \mathrm{Def}_{X_0} \end{tikzcd}$$

Beweis: Es ist zu zeigen, wie man eine Deformation von X aus den Baudaten der natürlichen Deformation zurückgewinnt. In ([FaPa97] Def. 3.3) wird dies wie folgt gemacht:
Sei $V = \oplus_{\chi \in G^*} \mathbb{V}(L_\chi)$ die Summe der Totalräume der Geradenbündel und $\pi : V \to Y$ die kanonische Projektion. Mit einem Querstrich bezeichnen wir die Pullbacks von Geradenbündeln unter π und mit σ_χ den tautologischen Schnitt von $\overline{\mathcal{L}_\chi}$. Setzt man weiterhin

$$\tau_i = \sum_{\{\chi | (i,\chi) \in S\}} \overline{s_{(i,\chi)}} \sigma_\chi$$

und nennt $\overline{\varphi_{\chi,\chi'}}$ die Pullbacks von $\varphi_{\chi,\chi'}$, dann sind

$$\rho_{\chi,\chi'} = \sigma_\chi \sigma_{\chi'} - \overline{\varphi_{\chi,\chi'}}^* (\sigma_{\chi\chi'} \prod \tau_i^{\varepsilon^i_{\chi,\chi'}})$$

Schnitte von $\overline{\mathcal{L}_\chi} \otimes \overline{\mathcal{L}'_\chi}$. Deren gemeinsamer Verschwindungsort in V ist das gesuchte X. In [Par91] Abschnitt 5 wird vorgeführt, dass es in der Tat eine (G, I)-Überlagerung mit gegebenen Baudaten ist und der Morphismus $X \to T$ flach ist. □

Bemerkung A.2.6. Bei einer zyklischen Überlagerung ist eine natürliche Deformation durch Tripel $(Y, \mathcal{L}, s_\chi)$ bestimmt, wobei Y und $\mathcal{L}$ wie oben und $\chi \neq \psi^{-1}$ ist, da I nur aus einem Element besteht.
Ist $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, so ist per Definition jede natürliche Deformation galoissch.

Unter der Voraussetzung, dass Y_0 (immer noch glatt und zudem) vom allgemeinen Typ ist, d.h. insbesondere, dass $H^0(Y, T_{Y_0}) = 0$ ist, bestimmen wir nun die Tangential- und Obstruktionsräume an die oben definierten Funktoren im Falle einer glatten Überlagerung. Die Gleichheit $T^i\mathrm{Def}_{Y_0} = H^i(Y, T_{Y_0})$ für $i = 1, 2$ ist ein Spezialfall von Satz A.1.5. Ist L eine invertierbare Garbe auf Y_0, so gibt es ein Bündel P_L, das in einer exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{Y_0} \longrightarrow P_L \xrightarrow{\mathrm{res}} T_{Y_0} \longrightarrow 0$$

sitzt, sodass der Tangentialraum bzw. Obstruktionsraum an $\mathrm{Def}_{(Y_0,L)}$ gleich $H^1(Y_0, P_L)$ bzw. $H^2(Y_0, P_L)$ ist. Dieses P_L erhält man wie folgt:
Ist U_α eine offene, T_{Y_0} und L trivialisierende Überdeckung von Y_0 und sind $(g_{\alpha\beta})$ die Übergangsfunktionen von L, so definiert $(g_{\alpha\beta}^{-1} dg_{\alpha\beta})$ einen 1-Kozykel in $\mathrm{Hom}(T_{Y_0}, \mathcal{O}_{Y_0})$ und P_L ist die zugehörige Erweiterung.
Ist der Divisor $D = \sum_{i \in I} D_i$ gegeben durch die Schnitte $s_\alpha \in \mathcal{O}_{Y_0}(D)(U_\alpha)$, so definiert man einen Morphismus $\varphi_D : P_L \to \mathcal{O}_{Y_0}(D)$ lokal durch

$$\varphi_D|_{U_\alpha} : (\lambda_\alpha \frac{\partial}{\partial y}, c_\alpha) \mapsto (\lambda_\alpha \frac{\partial}{\partial y}(ds_\alpha) - c_\alpha s_\alpha).$$

Dessen Kern ist gerade $T_{Y_0}\langle D\rangle$, die Garbe der Differentialformen, die das Ideal von D auf sich abbilden.
Schließlich ist der Tangentialraum an die Deformationen eines globalen Schnittes $s \in L$ gerade $H^0(Y_0, L)$ und $H^1(Y_0, L)$ der Obstruktionsraum ([FaPa97] Lemma 3.6). Damit können wir zusammenfassen:

Lemma A.2.7. *Ist h total verzweigt und X_0 glatt, so operiert G auf* Dnat_{X_0} *und wir haben eine Zerlegung der Tangential- und Obstruktionsräume nach Charakteren durch*

$$T^k\mathrm{Dnat}_{X_0}^{\mathrm{inv}} = T^k\mathrm{Dgal}_{X_0} = H^k(Y_0, T_{Y_0}\langle -D\rangle)$$
$$T^k\mathrm{Dnat}_{X_0}^{\chi} = \oplus_{i \in S_\chi} H^{k-1}(Y_0, \mathcal{O}_{Y_0}(D_i) \otimes L_\chi^{-1}),$$

wobei $S_\chi = \{i \in I | (i, \chi) \in S\}$.

Beweis: G operiert genau auf den Schnitten $s_{(i,\chi)}$ für $\chi \neq 1$ nichttrivial. Der invariante Teil folgt also aus [Weh86] und die χ-Dekomposition aus der Bemerkung unmittelbar vor dem Lemma. □

Aufgrund der Zerlegung von $h_* T_{X_0}$ (vgl [Par91] Prop. 4.1) kann man auch die Deformationsfunktoren von X_0 kohomologisch beschreiben:

Lemma A.2.8. *Ist X_0 glatt, so ist für $\chi \in G^* \setminus 1$*

$$T^k \mathrm{Def}^{\mathrm{inv}}_{X_0} = H^k(Y_0, T_{Y_0}\langle -D\rangle)$$

$$T^k \mathrm{Def}^{\chi}_{X_0} = H^k(Y_0, T_{Y_0}\langle -\sum_{i \in S_\chi} D_i\rangle \otimes L_\chi^{-1}).$$

Satz A.2.9. *Sei h eine total verzweigte Überlagerung und X_0 glatt. Dann ist*

$$\alpha^G : \mathrm{Dgal}_{X_0} \to \mathrm{Def}^G_{X_0}$$

ein Isomorphismus.
Verschwinden für alle $\chi \in G^* \setminus 1$ die Kohomologiegruppen $H^1(Y_0, L_\chi)$ und $H^1(Y_0, T_{Y_0} \otimes L_\chi)$, so ist

$$\alpha : \mathrm{Dnat}_{X_0} \to \mathrm{Def}_{X_0}$$

glatt, insbesondere surjektiv.
Ist zudem $\oplus_{i \in S_\chi} H^0(Y_0, \mathcal{O}_{Y_0}(D_i) \otimes L_\chi^{-1}) = 0$, so ist α ein Isomorphismus.

Beweis: Die erste Aussage ist klar nach den beiden vorangehenden Lemmata und dem Standardkriterium A.1.3.
Für $\chi \in G^* \setminus 1$ sei $D' = \sum_{i \in S_\chi} D_i$. Tensoriert man die exakte Sequenz

$$0 \to T_{Y_0}\langle -D'\rangle \to P_L \to \mathcal{O}_{Y_0} \to 0$$

mit L_χ^{-1}, so genügt es aufgrund des Standardkriteriums, das Verschwinden von $H^1(Y_0, P_L \otimes L_\chi^{-1})$ einzusehen. Dies folgt aus der Struktursequenz von P_L und den Voraussetzungen.
Die Zusatzbedingung der letzten Aussage erzwingt sogar, dass $\mathrm{Dnat}_{X_0} = \mathrm{Dgal}_{X_0} = \mathrm{Def}^G_{X_0} = \mathrm{Def}_{X_0}$. □

Bemerkung A.2.10. Für den Fall einer $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r$-Überlagerung zeigt Manetti ([Ma98]) den Satz auch ohne die Zusatzvoraussetzung der Glattheit und unter schwächeren Bedingungen als 'total verzweigt'.

Literaturverzeichnis

[ACGH85] Arbarello, E., Cornalba, M., Griffiths, P.A., Harris, J., *Geometry of Algebraic Curves*, Volume I, Springer Grundlehren 267 (1985)

[Ar62] Artin, M., *Some numerical criteria for contractability of curves on algebraic surfaces*, Am. J. Math. 84 (1962), 485–496

[Ar74] Artin, M., *Algebraic construction of Brieskorn's resolution*, J. Algebra 29 (1974), 330–348

[AW71] Artin, M., Winters, G., *Degenerate fibres and stable reduction of curves*, Topology 10 (1971), 373–383

[AS81] Axelsson, R., Schumacher, G., *Eine Künneth-Formel für die Tangentialkohomologie kompakter komplexer Räume*, J. reine ang. Math. 321 (1981), 138–149

[Bin87] Bingener, J., *Lokale Modulräume in der analytischen Geometrie*, Bd. 1 und 2, Vieweg (1987)

[Bea82] Beauville, A., *L'inégalité $p_g > 2q - 4$ pour les surfaces de type général*, Appendice à O.Debarre: *Inégalités numériques pour les surfaces de type général*, Bull. Soc. Math. France 110 (1982), 343–346

[Bea91] Beauville, A., Letter to F. Catanese, Appendix to F. Catanese: *Moduli and classification of irregular Kaehler manifolds (and algebraic varieties) with Albanese general type fibrations*, Invent. Math. 104 (1991), 263–289

[BLR90] Bosch, S., Lütkebohmert, W., Raynaud, M., *Néron Models*, Ergebnisse der Math. 3 Bd. 21, Springer-Verlag (1990)

[BPV84] Barth, W., Peters, C., van de Ven, A., *Compact Complex Surfaces*, Ergebnisse der Math. 3 Bd. 4, Springer-Verlag (1984)

[Bra01] Braungardt, V., *Überlagerungen von Modulräumen für Kurven*, Dissertation, Karlsruhe (2001)

[Cat87] Catanese, F., *Automorphisms of rational double points and moduli spaces of surfaces of general type*, Comp. Math. 61 (1987), 81–102

[Cat00] Catanese, F., *Fibred surfaces, varieties isogeneous to a product and related moduli spaces*, Am. J. Math. 122 (2000), 1–44

[Cat01] Catanese, F., *Moduli spaces of surfaces and real structures*, Preprint, math.AG/0103071 (2001)

[Con00] Conrad, B., *Grothendieck duality and base change*, Springer Lecture Notes in Mathematics 1750 (2000)

[DM69] Deligne, P., Mumford, D., *The irreducibility of the space of curves of a given genus*, Publ. Math., Inst. Hautes Études Sci. 36 (1969), 75–109

[EGA] Grothendieck, A., Dieudonné, J., *Eléments de la géométrie algébrique*, I: Springer Grundlehren 166 (1971), II: Publ. math. IHES 8 (1961), III: ibid, 11 (1961) und 17 (1963), IV: ibid, 20 (1964) , 24 (1965), 28 (1966) und 32 (1967)

[FC90] Faltings, G., Chai, C., *Degeneration of abelian varieties*, Ergebnisse der Mathematik 3 Bd. 22, Springer-Verlag (1990)

[Fl79] Flenner, H., *Über Deformationen holomorpher Abbildungen*, Osnabr. Schriften zur Math. Reihe M, Juni 1979 (1979)

[FaPa97] Fantechi, B., Pardini, R., *Automorphisms and moduli spaces of varieties with ample canonical class via deformations of abelian covers*, Comm. in Alg. 25(5) (1997), 1413–1441

[FaPe02] Fantechi, B., Pandharipande, R., *Stable maps and branch divisors*, Comp. Math. 130(3) (2002), 354–364

[FuPe95] Fulton, W., Pandharipande, R., *Notes on stable maps and quantum cohomology*, Kollár, János (ed.) et al., Algebraic geometry. Proc. of the Summer Res. Inst., Santa Cruz, 1995. Providence, RI: AMS Proc. Symp. Pure Math. 62(pt.2) (1997), 45–96

[Gro60] Grothendieck, A., *Téchniques de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique. Préschémas quotients*, Séminaire Bourbaki, Exposé 212 (1960/1961)

[Gro61] Grothendieck, A., *Les schémas de Picard. Propriétés générales*, Séminaire Bourbaki, Exposé 236 (1961/1962)

[Ha77] Hartshorne, R., *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics 52, Springer-Verlag (1977)

[HM98] Harris, J.; Morrison, A., *Moduli of curves*, Graduate Texts in Mathematics 187, Springer-Verlag (1998)

[Ho75] Horikawa, E., *On deformations of quintic surfaces*, Invent. Math. 31 (1975), 43–85

[Ho77] Horikawa, E., *On algebraic surfaces with pencils of curves of genus* 2, in: Complex Analysis and Algebraic Geometry, Cambridge (1977), 79–90

[LB92] Lange, H., Birkenhake, C., *Complex Abelian Varieties*, Grundlehren der Math. Wiss. 302., Springer-Verlag (1992)

[Ma97] Manetti, M., *Iterated double covers and connected components of moduli spaces*, Topology 36 No.3 (1997), 745–764

[Ma98] Manetti, M., *On the moduli space of diffeomorphic algebraic surfaces*, Preprint, math.AG/9802088 (1998)

[Mil80] Milne, J.S., *Étale Cohomology*, Princeton Math. Series 33 (1980)

[Mil86] Milne, J.S., *Abelian Varieties*, Arithmetic Geometry (Her.: Cornell, Silverman) Springer-Verlag (1986), 103–150,

[Mil86b] Milne, J.S., *Jacobian Varieties*, Arithmetic Geometry (Her.: Cornell, Silverman) Springer-Verlag (1986), 167–212

[MF82] Mumford, D., Fogarty, J., *Geometric Invariant Theory*, Ergebnisse der Mathematik 3 Bd. 30, Springer-Verlag, Zweite Auflage (1982)

[Na74] Namikawa, Y., *Studies on degeneration*, Springer Lecture Notes in Mathematics 412 (1974), 165–210

[Na76] Namikawa, Y., *A new compactification of the Siegel space and degeneration of Abelian varieties II*, Math. Ann. 221 (1976) 201–241

[NU73] Namikawa, Y., Ueno, K., *The complete classification of fibres in pencils of curves of genus two*, Manuscr. Math. 9 (1973), 143–186

[Oen00] Önsiper, H., *On the moduli spaces of fiber bundles of curves of genus* ≥ 2, Arch. Math. 75 (2000), 346–348

[OS80] Oort, F., Steenbrink, J., *The local Torelli problem for algebraic curves*, Journées de géométrie algébrique (1980), Angers/France 1979, 157–204

[Par91] Pardini, R., *Abelian covers of algebraic varieties*, J. reine angew. Math. 417 (1991), 191–213

[Pi89] Pirola, J.-P., *Curves on Generic Kummer Varieties*, Duke Math. J. 59 No.3 (1989), 701–708

[Po77] Popp, H., *Moduli theory and classification theory of algebraic varieties*, Springer Lecture Notes in Mathematics 620 (1977)

[Sei82] Seiler, W. K., *Moduln elliptischer Flächen mit Schnitt*, Dissertation, Karlsruhe, 1982

[Sei87] Seiler, W. K., *Global moduli for polarized elliptic surfaces*, Comp. Math. 62 (1987), 187–213

[Sei95] Seiler, W. K., *Moduli of surfaces of general type with a fibration by genus two curves*, Math. Ann. 301 (1995), 771–812

[Ser92] Serrano, F., *Deformations of multiple fibres*, Math. Z. 211 (1992), 87–92

[Ser96] Serrano, F., *Isotrivial Fibred Surfaces*, Annali di Matematica pura ed app. (IV), Vol. CLXXI (1996), 63–82

[Sch68] Schlessinger, M., *Functors of artin rings*, Trans. AMS 130 (1968)

[Sh71] Shimura, T., *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions*, Princeton Univerity Press (1971)

[Tan72] Tankeev, S. G., *A global theory of moduli*, Math USSR Izvestija 36 (1972) No. 6, 1200–1217

[Tm84] Tannenbaum, A., *On the classical characteristic linear series of plane curves with nodes and cuspidal points: Two examples of Beniamino Segre*, Comp. Math. 51 (1984), 169–183

[Vie77] Viehweg, E., *Invarianten der degenerierten Fasern in lokalen Familien von Kurven*, J. reine angew. Math. 293/294 (1977), 284–308

[Wa72] Wavrik, John J., *Obstruction to the existence of a space of moduli*, Princeton Math. Series 29 (1972), 403–414

[Weh86] Wehler, J., *Cyclic Coverings: Deformations and Torelli Theorem*, Math. Ann. 274 (1986), 443–472

[Xi85] Xiao, G., *Surfaces fibrées en courbes de genre deux*, Springer Lecture Notes 1137 (1985)

[Xi87] Xiao, G., *Fibred Algebraic Surfaces with Low Slope*, Math. Ann. 276 (1987), 449–466

[Xi92] Xiao, G., *Irregular Families of Hyperelliptic Curves* Papers from the special year on algebraic geometry, Nankai Institute of Mathematics, Tianjin, China, September 1989–June 1990. Singapore: World Scientific. (1992), 152–156

Symbolliste