

Algebraische Kombinatorik und Anwendungen in der kommutativen Algebra

Dr. Martina Kubitzke

Wintersemester 2012/13

Goethe-Universität Frankfurt

Inhaltsverzeichnis

1	Monomiale Ideale und simpliziale Komplexe	1
1.1	Monomiale Ideale	1
1.2	Primärzerlegung	4
1.3	Simpliziale Komplexe	7
1.4	Facetten-Ideale und Stanley-Reisner Ideale	10
2	Cohen-Macaulay Komplexe und schälbare Komplexe	13
2.1	Simpliziale Homologie	13
2.2	Die Cohen-Macaulay Eigenschaft	17
2.3	Schälbare simpliziale Komplexe	19
3	Hilbert-Funktionen und die Theoreme von Kruskal-Katona und Macaulay	23
3.1	f - und h -Vektoren und Hilbert-Reihen	23
3.2	Der Satz von Kruskal-Katona	25
3.3	Multikomplexe und der Satz von Clements-Lindström	40
4	Alexander Dualität und endliche Graphen	43
4.1	Auflösungen und die Formel von Hochster	43
4.1.1	Freie Auflösungen	43
4.1.2	Freie Auflösungen und simpliziale Komplexe	46
4.2	Cohen-Macaulay bipartite Graphen	47
4.2.1	Endliche Graphen und Kantenideale	48
4.2.2	Endliche partiell geordnete Mengen	51
4.2.3	Cohen-Macaulay bipartite Graphen	53
4.3	Diracs Theorem über chordale Graphen	57

1 Monomiale Ideale und simpliziale Komplexe

1.1 Monomiale Ideale

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit den Grundlagen zu monomialen Idealen. Insbesondere sollen so genannte quadratfreie monomiale Ideale untersucht werden. Im folgenden sei k ein gewöhnlicher Körper und sei $S = k[x_1, \dots, x_n]$ der Polynomring in n Variablen $x_1, \dots, x_n$. Wir wiederholen zunächst den Begriff eines Ideals.

Definition 1.1.1. Eine Menge $I \subseteq S$ heißt *Ideal*, falls

- (i) I abgeschlossen ist bzgl. Addition, d.h. falls $f, g \in I$, so ist auch $f + g \in I$.
- (ii) für $f \in S$ und $p \in I$ gilt $f \cdot p \in I$.

Da der Polynomring in n Variablen noethersch ist (Hilbertscher Basissatz), wissen wir, dass jedes Ideal von einer endlichen Menge von Elementen erzeugt wird. Dies ist äquivalent dazu, dass in S die aufsteigende Kettenbedingung gilt, d.h.: Ist

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$$

eine aufsteigende Kette von Idealen, so wird diese nach endlich vielen Schritten stationär, d.h. es existiert ein $s \in \mathbb{N}$, so dass $I_s = I_{s+1} = \dots$. Wir werden dies nicht beweisen, jedoch im folgenden mehrfach verwenden. Im folgenden sei $\mathbb{Z}_+^n = \{(a_1, \dots, a_n) : a_i \in \mathbb{Z} \text{ und } a_i \geq 0 \text{ für alle } 1 \leq i \leq n\}$. Wir kommen nun zu dem zentralen Begriff eines monomialen Ideals.

Definition 1.1.2. (i) Jedes Produkt $x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ mit $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ heißt *Monom* in S . Wir schreiben kurz x^a für $x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$.

(ii) Wir schreiben $\text{Mon}(S)$ für die Menge der Monome in S und $\text{Mon}(I)$ für die Menge der Monome in einem Ideal I .

(iii) Wir nennen ein Ideal $I \subseteq S$ ein *monomiales Ideal*, falls I von Monomen erzeugt wird.

(iv) Ist $f = \sum_{u \in \text{Mon}(S)} a_u u$ mit $a_u \in k$, so nennen wir $\text{supp}(f) = \{u : a_u \neq 0\}$ den *Support* von f .

Gegeben ein Ideal $I \subseteq S$ und ein Polynom $f \in S$ möchte man entscheiden, ob f in I liegt. Im allgemeinen lässt sich dieses Problem nicht ohne weiteres lösen (Gröbner Basen). Im Falle von monomialen Idealen ist die Lösung allerdings sehr einfach.

Lemma 1.1.3. *Sei $I \subseteq S$ ein monomiales Ideal und sei $f \in S$. Dann ist f genau dann in I , wenn $\text{supp}(f) \subseteq I$.*

Beweis. $\Leftarrow$: Ist $f \in S$ mit der Eigenschaft, dass $\text{supp}(f) \subseteq I$, so folgt bereits aus der Definition eines Ideals (Definition 1.1.1 (i)), dass $f \in I$ gilt.

$\Rightarrow$: Sei umgekehrt $f \in I$. Wir werden zeigen, dass die Menge der Monome $\text{Mon}(I)$ in I eine k -Vektorraumbasis für I bildet.

Da $\text{Mon}(I) \subseteq \text{Mon}(S)$ und die Elemente letzterer Menge linear unabhängig sind, sind auch alle Monome in I linear unabhängig.

Wir müssen zeigen, dass $\text{Mon}(I)$ auch ein Erzeugendensystem für I ist. Sei dazu $f \in I$. Gemäß der Definition eines monomialen Ideals müssen dann Monome $u_1, \dots, u_m \in \text{Mon}(I)$ und Polynome $f_1, \dots, f_m \in S$ existieren, so dass $f = \sum_{i=1}^m f_i u_i$. Sei $u \in \text{supp}(f)$ ein beliebiges Monom im Support von f . Dann existiert ein $1 \leq i \leq m$, so dass u auch im Support von $f_i u_i$ ist, d.h. u ist von der Form $w \cdot u_i$, wobei w ein Monom in S ist. Damit gilt insbesondere $u \in \text{Mon}(I)$ und f lässt sich als Linearkombination der Elemente in $\text{Mon}(I)$ schreiben. $\square$

Man kann zeigen, dass die angegebene Bedingung in obigem Lemma gerade monomiale Ideale charakterisiert.

Korollar 1.1.4. *Sei $I \subseteq S$ ein Ideal. Dann sind äquivalent:*

- (i) I ist ein monomiales Ideal
- (ii) Für alle $f \in S$ gilt: $f \in I$ genau dann wenn $\text{supp}(f) \subseteq I$.

Beweis. Wir müssen nur noch (ii) $\Rightarrow$ (i) zeigen. Die andere Richtung folgt aus Lemma 1.1.3. Seien $f_1, \dots, f_m$ Erzeuger von I . Dann gilt nach Voraussetzung $\text{supp}(f_i) \subseteq I$ für alle i . Daraus folgt, dass $\bigcup_{i=1}^m \text{supp}(f_i)$ eine Menge monomialer Erzeuger für I ist. $\square$

Um das Idealzugehörigkeits-Problem für monomiale Ideale zu lösen, reicht es also dieses für Monome zu lösen. Der nächste Satz liefert dazu das entscheidende Mittel.

Satz 1.1.5. *Sei $I \subseteq S$ ein monomiales Ideal und sei $\{u_1, \dots, u_m\} \subseteq \text{Mon}(S)$ eine Menge von Erzeugern I . Ein Monom v gehört genau dann zu I , wenn ein $1 \leq i \leq m$ existiert, so dass u_i das Monom v teilt.*

Beweis. $\Leftarrow$: $\checkmark$ (folgt, da $\{u_1, \dots, u_m\}$ Erzeugendensystem ist.)

$\Rightarrow$: Sei $v \in I$. Dann existieren Polynome $f_1, \dots, f_m$, so dass $v = \sum_{i=1}^m f_i u_i$. Insbesondere existiert ein $1 \leq i \leq m$, so dass v im Support von $f_i u_i$ liegt. Daraus folgt $v = w u_i$ für ein Monom w im Support von f_i . $\square$

Eine Eigenschaft, die das Arbeiten mit monomialen Idealen sehr angenehm macht, ist die folgende:

Satz 1.1.6. *Jedes monomiale Ideal hat eine eindeutige minimale Menge aus monomialen Erzeugern.*

Beweis. Per Definition wird I von Monomen erzeugt. Ferner ist eine minimale Erzeugendenmenge endlich, da aus dem Hilbertschen Basissatz folgt, dass der Polynomring in n Variablen über einem Körper k noethersch ist und damit jede aufsteigende Kette von Idealen stationär ist, also insbesondere eine endliche Erzeugendenmenge für I existiert.

Wir müssen daher lediglich die Eindeutigkeit einer minimalen Erzeugendenmenge zeigen. Seien daher $G_1 = \{u_1, \dots, u_r\}$ und $G_2 = \{v_1, \dots, v_s\}$ zwei minimale monomiale Erzeugendensysteme von I . Wir zeigen zunächst $G_1 \subseteq G_2$. Betrachte $u_i \in G_1$. Wegen $u_i \in I$ gilt $u_i = w_1 \cdot v_j$ für ein $1 \leq j \leq s$ und ein Monom $w_1 \in \text{Mon}(S)$. Entsprechend existiert aber auch ein $1 \leq k \leq r$ und ein Monom $w_2 \in \text{Mon}(S)$, so dass $v_j = w_2 \cdot u_k$. Insgesamt gilt also $u_i = w_1 w_2 u_k$. Aus der Minimalität von G_1 folgt dann bereits $i = k$ und $w_1 w_2 = 1$. Insbesondere gilt $w_1 = 1$ und damit $u_i = v_j \in G_2$, also $G_1 \subseteq G_2$. Die umgekehrte Inklusion gilt per Symmetrie. $\square$

Im folgenden bezeichnen wir die minimale Menge monomialer Erzeuger eines monomialen Ideals mit $G(I)$. Arbeitet man mit Idealen, so ist es üblich algebraische Operationen, wie Summe, Produkt und Schnitt zu betrachten. Es lässt sich meist recht leicht zeigen, dass die Menge der monomialen Ideale unter diesen Operationen abgeschlossen ist.

Bemerkung 1.1.7. Seien $I, J \subseteq S$ monomiale Ideale. Dann gilt:

- (i) $I + J$ ist ein monomiales Ideal und $G(I + J) \subseteq G(I) \cup G(J)$.
- (ii) $I \cdot J$ ist ein monomiales Ideal und $G(I \cdot J) \subseteq G(I)G(J)$.
- (iii) $I \cap J$ ist ein monomiales Ideal und $\{\text{kgV}(u, v) : u \in G(I), v \in G(J)\}$ ist eine Menge von Erzeugern für $I \cap J$.

Unser Hauptinteresse wird nicht an monomialen Idealen im allgemeinen liegen, sondern solchen die quadratfrei sind. Dabei nennen wir ein Monom x^a *quadratfrei*, falls $a \in \{0, 1\}^n$, d.h. $x_i^2 \nmid x^a$ für alle $1 \leq i \leq n$. Entsprechend wird ein monomiales Ideal als *quadratfrei* bezeichnet, wenn es von quadratfreien Monomen erzeugt wird.

Lemma 1.1.8. *Ist I ein quadratfreies monomiales Ideal, so gilt $I = \sqrt{I}$, wobei $\sqrt{I} = \{f \in S : f^m \in I \text{ für ein } m \in \mathbb{N}\}$ das Radikal-Ideal von I bezeichnet.*

Beweis. Wir betrachten das minimale Erzeugendensystem $G(I)$ von I . Für ein beliebiges Monom $u = \prod_{i=1}^n x_i^{a_i}$ setzen wir $\sqrt{u} = \prod_{i, a_i \neq 0} x_i$. Wir zeigen zunächst folgende Behauptung.

Behauptung: Für ein beliebiges monomiales Ideal I gilt, dass $\sqrt{I}$ von $\{\sqrt{u} : u \in G(I)\}$ erzeugt wird.

Offensichtlich gilt $\{\sqrt{u} : u \in G(I)\} \subset \sqrt{I}$. Da $\sqrt{I}$ ein monomiales Ideal ist, reicht es wegen Lemma 1.1.3 zu zeigen, dass für jedes Monom $v \in \sqrt{I}$ ein Monom $u \in G(I)$ existiert, so dass $\sqrt{u}|v$. Ist $v \in \text{Mon}(\sqrt{I})$, so ist $v^s \in I$ für ein $s \in \mathbb{N}$. Somit existiert ein $u \in G(I)$ mit $u|v^s$. Daraus folgt $\sqrt{u}|\sqrt{v^s} = v$ und damit die Behauptung.

Ist I quadratfrei, so gilt $\sqrt{u} = u$ für alle $u \in G(I)$ und damit $G(I) = \{\sqrt{u} : u \in G(I)\}$. Aus der gerade gezeigten Behauptung folgt dann $I = \sqrt{I}$. $\square$

1.2 Primärzerlegung

Definition 1.2.1. (i) Ein (monomiales) Ideal $I \subsetneq S$ heißt *irreduzibel*, falls es nicht als echter Schnitt zweier (monomialer) Ideale geschrieben werden kann, d.h. aus $I = I_1 \cap I_2$ folgt bereits $I = I_1$ oder $I = I_2$.

(ii) Ein Ideal $I \subseteq S$ heißt *Primideal*, falls aus $fg \in I$ schon $f \in I$ oder $g \in I$ folgt.

(iii) Ein Ideal $I \subsetneq S$ heißt *primär*, falls aus $gh \in I$ schon $g \in I$ oder $h^m \in I$ folgt für ein positives $m \in \mathbb{N}$. In diesem Fall ist $\mathfrak{p} = \sqrt{I}$ ein Primideal und wir nennen I $\mathfrak{p}$ -primär

Beispiel 1.2.2. (i) $I = (x_1^2, x_3^4, x_5^{12})$ ist irreduzibel und (x_1, x_3, x_5) -primär. Wir werden zeigen, dass jedes irreduzible monomiale Ideal von Potenzen von Variablen erzeugt wird.

(ii) $J = (x_1^2, x_3^3, x_4^7, x_1x_3^2, x_3^2x_4^5)$ ist nicht irreduzibel, denn es gilt

$$\begin{aligned} J &= (x_1^2, x_3^3, x_4^7, x_1x_3^2, x_3^2) \cap (x_1^2, x_3^3, x_4^7, x_1x_3^2, x_4^5) \\ &= (x_1^2, x_4^7, x_1x_3^2, x_3^2) \cap (x_1^2, x_3^3, x_1x_3^2, x_4^5), \end{aligned}$$

aber man kann leicht zeigen, dass J (x_1, x_3, x_4) -primär ist. In der Tat werden wir sehen (siehe Übungsaufgabe), dass jedes monomiale primäre Ideal von der Form ist $(x_1^{a_1}, \dots, x_r^{a_r}, x^{b_1}, \dots, x^{b_s})$, wobei $a_i \geq 1$ für alle i und $\text{supp}(x^{b_i}) \subseteq \{1, \dots, r\}$ für alle i .

Satz 1.2.3. (i) Ein monomiales Ideal ist genau dann irreduzibel, wenn es von der Form $I = \langle x_{i_1}^{a_1}, \dots, x_{i_k}^{a_k} \rangle$ ist für $a_i \in \mathbb{N}_+$, $1 \leq i \leq k$

(ii) Ist I ein irreduzibles Ideal, so ist I $\sqrt{I}$ -primär.

Beweis. Beweis von (i): Wir nehmen zunächst an, dass I ein monomiales Ideal ist, dass die Form $I = \langle x_{i_1}^{a_1}, \dots, x_{i_k}^{a_k} \rangle$ hat. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei weiter $i_1 < \dots < i_k$. Da $I \subseteq \langle x_{i_1}, \dots, x_{i_k} \rangle$ gilt, gilt $I \neq S$. Angenommen I wäre reduzibel, d.h. es existieren zwei monomiale Ideale $I_1, I_2 \subsetneq S$, so dass $I = I_1 \cap I_2$ und $I \subsetneq I_1$ sowie $I \subsetneq I_2$. Dann existieren Monome $x^b \in I_1 \setminus I$ und $x^c \in I_2 \setminus I$. Weiter muss gelten $b_{i_j} < a_j$ und $c_{i_j} < a_j$ für $1 \leq j \leq k$, da sonst $x^b \in I$ bzw. $x^c \in I$ wäre. Daraus folgt dann $\text{kgV}(x^b, x^c) = \prod_{i=1}^n x_i^{\max(b_i, c_i)} \notin I$. Andererseits gilt aber $\text{kgV}(x^b, x^c) \in I_1 \cap I_2 = I$. Wir erhalten also einen Widerspruch und damit ist I irreduzibel.

Für die Rückrichtung nehmen wir an, dass I irreduzibel ist. Sei $G(I) = \{u_1, \dots, u_m\}$ das minimale monomiale Erzeugendensystem von I . Wir müssen zeigen, dass jedes u_j die Potenz einer Variable ist, d.h. $u_j = x_{i_j}^{a_j}$ für ein $1 \leq i_j \leq n$ und $a_j \in \mathbb{N}_{>0}$. Angenommen dies ist nicht der Fall. Nach Umm Nummerierung der Variablen sowie Umordnung der u_i können wir annehmen, dass $u_m = x_1^s f$ für $s \in \mathbb{N}_{>0}$, $f \in \text{Mon}(S)$, $f \neq 1$ und $x_1 \nmid f$. Wir setzen $I_1 = \langle u_1, \dots, u_{m-1}, x_1^s \rangle$ und $I_2 = \langle u_1, \dots, u_{m-1}, f \rangle$. Aus Bemerkung 1.1.7 (iii) folgt

$$\begin{aligned} I_1 \cap I_2 &= \langle u_1, \dots, u_{m-1}, \text{kgV}(u_1, x_1^s), \text{kgV}(u_1, f), \dots, \text{kgV}(u_{m-1}, x_1^s), \text{kgV}(u_{m-1}, f), \text{kgV}(x_1^s, f) \rangle \\ &= \langle u_1, \dots, u_m \rangle = I, \end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass $u_i | \text{kgV}(u_i, f)$, $u_i | \text{kgV}(u_i, x_1^s)$ für $1 \leq i \leq m$ und $\text{kgV}(x_1^s, f) = u_m$. Wir zeigen nun, dass auch $I \subsetneq I_1$ und $I \subsetneq I_2$ gilt, was schließlich einen Widerspruch zu der Irreduzibilität von I liefert. Da $I = I_1 \cap I_2$ gilt bereits $I \subseteq I_1$ und $I \subseteq I_2$. Es bleibt daher zu zeigen $I \neq I_1$ und $I \neq I_2$. Wir zeigen nur die erste Ungleichheit, die andere folgt analog. Per Konstruktion gilt $x_1^s \in I_1$. Es gilt aber $x_1 \notin I$. In der Tat, wäre $x_1^s \in I$, so würde gelten: $u_i | x_1^s$ für ein $1 \leq i \leq m$. Also insbesondere: $u_i | x_1^s f = u_m$. Wegen der Minimalität von $G(I)$ gilt dann $i = m$ und weiter $x_1^s f | x_1^s$, woraus folgt $f = 1$. Dies gibt den gewünschten Widerspruch.

Beweis von (ii): Sei $f \cdot g \in I$ für Polynome $f, g \in S$. Wir müssen zeigen, dass entweder $f \in I$ oder $g^s \in I$ für ein $s \in \mathbb{N}$ gilt. Für $j \in \mathbb{N}$ betrachte das Ideal $I_j = \{h \in S : hg^j \in I\}$. Wir erhalten damit die Kette

$$I = I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$$

in S . Da S noethersch ist, muss diese Kette abbrechen, d.h. es existiert ein $s \in \mathbb{N}$, so dass $I_s = I_{s+1} = \dots$. Wir zeigen nun, dass sich I schreiben lässt als $I = ((g^s) + I) \cap I_1$. Sei dazu $h \in ((g^s) + I) \cap I_1$. Dann existieren $a \in S$ und $b \in I$, so dass $h = ag^s + b$. Da aber auch $hg \in I$ gelten muss, folgt damit $ag^{s+1} = hg - hb \in I$. Gemäß der Definition von I_{s+1} können wir schließen, dass $a \in I_{s+1} = I_s$ und daher $ag^s \in I$. Schließlich folgt $h = ag^s + b \in I$. Dies zeigt $((g^s) + I) \cap I_1 \subseteq I$. Die umgekehrte Inklusion ist trivial. Da I irreduzibel ist, muss in der gerade gezeigten Zerlegung nun gelten: $I = (g^s) + I$ oder $I = I_1$. In ersterem Fall folgt $g^s \in I$. In letzterem Fall folgt $f \in I$. Damit ist I primär. $\square$

Als Konsequenz aus obigem Satz erhalten wir folgendes Korollar.

Korollar 1.2.4. *Das monomiale Ideal $\langle x_{i_1}^{a_1}, \dots, x_{i_k}^{a_k} \rangle$ ist $(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$ -primär.*

Beweis. Nach Satz 1.2.3 (i) ist $\langle x_{i_1}^{a_1}, \dots, x_{i_k}^{a_k} \rangle$ irreduzibel. Der zweite Teil desselbigen Satzes impliziert nun, dass $\langle x_{i_1}^{a_1}, \dots, x_{i_k}^{a_k} \rangle$ primär ist und wegen $\sqrt{\langle x_{i_1}^{a_1}, \dots, x_{i_k}^{a_k} \rangle} = (x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$ folgt die Aussage des Satzes. $\square$

Ziel dieses Abschnitts ist es zu zeigen, dass sich jedes Ideal in S oder allgemeiner in einem Noetherschen Ring als irredundanten Schnitt primärer Ideale zu schreiben. Dazu wird es nötig sein zunächst eine Darstellung als Schnitt irreduzibler Ideale zu finden und dann Komponenten mit dem gleichen Radikal zusammenzufassen. Wir werden uns im folgenden nicht

auf monomiale Ideale beschränken, sondern gewöhnliche Ideale betrachten. Wir nennen eine Darstellung eines Ideals I als Schnitt von Idealen, d.h. $I = \bigcap_{i=1}^m Q_i$ *irredundant* oder *minimal*, falls kein Ideal im Schnitt weggelassen werden kann, d.h. $Q_i \not\supseteq \bigcap_{j \neq i} Q_j$ für alle $1 \leq i \leq m$.

Satz 1.2.5. (i) Jedes Ideal $I \subsetneq S$ kann geschrieben werden als $I = \bigcap_{i=1}^m Q_i$, wobei Q_i irreduzibel ist. Ferner existiert eine irredundante solche Zerlegung.

(ii) Ist I ein monomiales Ideal und ist die Zerlegung in I irredundant, so ist sie eindeutig.

Beweis. Wir beweisen den ersten Teil des Satzes mittels Widerspruch. Angenommen es existiert ein Ideal $I \subsetneq S$, das nicht als endlicher Schnitt irreduzibler Ideale geschrieben werden kann. Insbesondere muss I dann reduzibel sein, d.h. es existieren Ideale I_1 und I_2 mit $I = I_1 \cap I_2$ und $I \subsetneq I_1$ und $I \subsetneq I_2$. Ebenso wie bei I kann es sich bei mindestens einem der Ideale I_1 und I_2 nicht um einen endlichen Schnitt irreduzibler Ideale handeln. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei dies für I_1 der Fall. Mit der gleichen Begründung wie zuvor für I (aber jetzt auf I_1 angewandt) finden wir ein Ideal I_2 , so dass $I_1 \subsetneq I_2$ und das sich nicht als endlicher Schnitt irreduzibler Ideale schreiben lässt. Durch Iteration dieses Prozesses erhalten wir eine unendliche aufsteigende Kette von Idealen $I \subsetneq I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \dots$. Dies ergibt einen Widerspruch dazu, dass der Polynomring S noethersch ist. Wir haben damit gezeigt, dass I geschrieben werden kann als $I = \bigcap_{i=1}^m Q_i$, wobei Q_i irreduzibel ist. Indem wir Komponenten Q_i aus dem Schnitt entfernen mit der Eigenschaft, dass $Q_i \supset \bigcap_{j \neq i} Q_j$ erhalten wir eine irredundante Zerlegung.

Wir beweisen nun (ii). Seien $I = \bigcap_{i=1}^m Q_i = \bigcap_{i=1}^s Q'_i$ zwei irredundante Zerlegungen von I in irreduzible Ideale. Wegen Satz 1.2.3 wissen wir, dass die Ideale Q_i und Q'_i von Potenzen von Variablen erzeugt werden. Sei $i \in [m]$. Wir zeigen, dass ein $j \in [s]$ existiert, so dass $Q'_j \subseteq Q_i$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $Q_i = (x_1^{a_1}, \dots, x_k^{a_k})$. Angenommen es gilt $Q'_j \not\subseteq Q_i$ für alle $j \in [s]$. Dann existiert für jedes $j \in [s]$ ein Monom $x_j^{b_j} \in Q'_j \setminus Q_i$. Dann gilt entweder $l_j \notin [k]$ oder $b_j < a_{l_j}$. Wir setzen $u = \text{kgV}\{x_{l_1}^{b_1}, \dots, x_{l_s}^{b_s}\}$. Per Definition gilt $u \in \bigcap_{j=1}^s Q'_j \subseteq Q_i$. Letztere Inklusion impliziert, dass ein $i \in [k]$ existieren muss, so dass $x_i^{a_i}$ das Monom u teilt. Dies führt zu einem Widerspruch. Zusammenfassend haben wir gezeigt, dass für jedes $i \in [m]$ ein $j \in [s]$ existiert, so dass $Q'_j \subseteq Q_i$. Per Symmetrie gilt auch, dass für jedes $k \in [s]$ ein $l \in [m]$ existiert mit $Q_l \subseteq Q'_k$. Daraus kann man dann mit Hilfe der Irredundanz schließen, dass $m = s$ und auch $\{Q_1, \dots, Q_m\} = \{Q'_1, \dots, Q'_s\}$ gelten muss. Dies zeigt dann die Eindeutigkeit der Zerlegung. $\square$

Der gerade bewiesene Satz gilt über jedem Noetherschen Ring.

Wir können nun unser Hauptergebnis beweisen:

Theorem 1.2.6. Jedes Ideal $I \subsetneq S$ besitzt eine minimale Primärzerlegung, d.h. eine Zerlegung $I = \bigcap_{i=1}^m Q_i$, wobei Q_i ein $\sqrt{Q_i} = P_i$ -primäres Ideal ist, $P_i \neq P_j$ für $i \neq j$ gilt und so dass gilt $Q_i \not\supseteq \bigcap_{j \neq i} Q_j$ für alle $1 \leq i \leq m$.

Die Ideale P_i in einer minimalen Primärzerlegung werden als zu I assoziierte Primideale bezeichnet. Das Ideal Q_i wird die zu I P_i -primäre Komponente genannt.

Beweis. Es folgt bereits aus Satz 1.2.5, dass I geschrieben werden kann als $I = \bigcap_{i=1}^m Q_i$, wobei die Q_i irreduzibel sind und $Q_i \not\supseteq \bigcap_{j \neq i} Q_j$ für alle $1 \leq i \leq m$. Wegen Satz 1.2.3 (ii) sind die Ideale Q_i dann sogar primär. Im nächsten Schritt fassen wir alle Ideale Q_i zusammen, die dasselbe Radikal-Ideal haben. Der Schnitt dieser Ideale ist erneut primär (siehe Übungsaufgabe) und damit können wir auch die Gültigkeit der Bedingung $P_i \neq P_j$ für $i \neq j$ garantieren. $\square$

Beispiel 1.2.7.

$$\begin{aligned} I &= (x_1^3, x_2^3, x_1^2 x_3^2, x_1 x_2 x_3^2, x_2^2 x_3^2) \\ &= (x_1^3, x_2^3, x_1^2 x_3^2, x_1, x_2^2 x_3^2) \cap (x_1^3, x_2^3, x_1^2 x_3^2, x_2, x_2^2 x_3^2) \cap (x_1^3, x_2^3, x_1^2 x_3^2, x_3^2, x_2^2 x_3^2) \\ &= (x_2^3, x_1, x_2^2 x_3^2) \cap (x_1^3, x_1^2 x_3^2, x_2) \cap (x_1^3, x_2^3, x_3^2) \\ &= (x_2^3, x_1, x_2^2) \cap (x_2^3, x_1, x_3^2) \cap (x_1^3, x_1^2, x_2) \cap (x_1^3, x_2^3, x_2) \cap (x_1^3, x_2^3, x_3^2) \\ &= (x_1, x_2^2) \cap (x_1^2, x_2) \cap (x_1^3, x_2^3, x_3^2) \end{aligned}$$

Die obige Zerlegung ist die eindeutige irredundante Darstellung des Ideals I als Schnitt irreduzibler monomialer Ideale. Die Ideale (x_1^2, x_2) und (x_1, x_2^2) sind beide (x_1, x_2) -primär. Wir bekommen daher als (x_1, x_2) -primäres Ideal assoziiert zu I den Schnitt $(x_1, x_2^2) \cap (x_1^2, x_2) = (x_1^2, x_2^2, x_1 x_2)$. Damit erhalten wir folgende irredundante Primärzerlegung von I

$$I = (x_1^2, x_2^2, x_1 x_2) \cap (x_1^3, x_2^3, x_3^2).$$

Im allgemeinen gibt es verschiedene Primärzerlegungen eines monomialen Ideales, d.h. insbesondere ist eine solche nicht unbedingt eindeutig. Konstruiert man aber wie in obigem Beispiel eine Primärzerlegung ausgehend von dem irredundanten Schnitt irreduzibler Ideale (Satz 1.2.5), so ist die erhaltene Primärzerlegung eindeutig und sie wird als *Standard-Primärzerlegung* von I bezeichnet.

Ist I ein quadratfreies monomiales Ideal, so werden die primären Komponenten von Variablen erzeugt, d.h. insbesondere lässt sich I in diesem Fall als Schnitt monomialer Primideale schreiben.

1.3 Simpliziale Komplexe

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit simplizialen Komplexen. Diese sollen im darauffolgenden Abschnitt verwendet werden um quadratfreie monomiale Ideale kombinatorisch zu beschreiben. Im folgenden, sei $[n] = \{1, \dots, n\}$.

Definition 1.3.1. Ein (*abstrakter*) *simplizialer Komplex* Δ auf der Eckenmenge $[n]$ ist eine Menge von Teilmengen von $[n]$ mit den Eigenschaften, dass

- (i) $\emptyset \in \Delta$
- (ii) Falls $F \in \Delta$ und $G \subsetneq F$, so ist auch $G \in \Delta$.

Die Elemente in Δ werden als *Seiten* bezeichnet und wir definieren $\dim F = |F| - 1$ als die *Dimension* einer Seite $F \in \Delta$. Die *Dimension* von Δ ist die maximale Dimension seiner Seiten. 0-dimensionale Seiten nennen wir *Ecken* und Seiten, die bezüglich Inklusion maximal sind, heißen *Facetten*. Wir nennen Δ *rein*, falls alle Facetten die selbe Dimension haben.

Beispiel 1.3.2. (i) $\Delta = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 3\}\}$ Geometrisch können wir uns Δ als ausgefülltes Dreieck mit den Ecken 1, 2 und 3, sowie einer zusätzlichen Kante von 1 nach 4 vorstellen. Wir werden dies noch präzisieren. $\{1, 2, 3\}$ und $\{1, 4\}$ sind die Facetten. Der Komplex hat Dimension 2 und ist nicht rein.

(ii) Für $n \geq 1$ definiere $\Delta_{n-1} = 2^{[n]} = \{A : A \subseteq [n]\}$ als (abstrakten) $(n-1)$ -Simplex. Δ_n ist rein, $(n-1)$ -dimensional und die einzige Facette ist $[n]$.

Wir benötigen noch einige Notationen. Wir schreiben $\mathcal{F}(\Delta)$ bzw. $\mathcal{N}(\Delta)$ für die Menge der Facetten bzw. der minimalen Nicht-Seiten von Δ , d.h. $\mathcal{N}(\Delta) = \{G \subseteq [n] : G \notin \Delta \text{ und } G \text{ minimal}\}$. Es ist klar, dass ein simplizialer Komplex Δ eindeutig durch die Menge seiner Facetten bzw. seiner minimalen Nicht-Seiten beschrieben wird.

Beispiel 1.3.3. (i) Der simpliziale Komplex Δ in Beispiel 1.3.2 (i) hat als minimale Nicht-Seiten $\{2, 4\}$ und $\{3, 4\}$. Die Menge $\{1, 3, 4\}$ ist auch eine Nicht-Seite, aber nicht minimal.

(ii) Der $(n-1)$ -Simplex besitzt keine Nicht-Seiten.

Im folgenden möchten wir beschreiben, wie wir uns einen simplizialen Komplex geometrisch vorstellen können. Dazu benötigen wir zunächst die Definition eines geometrischen Simplexes.

Definition 1.3.4. Seien $p_1, \dots, p_{d+1}$ affin unabhängige Punkte im $\mathbb{R}^n$, d.h. $p_2 - p_1, \dots, p_{d+1} - p_1$ sind linear unabhängig. Dann heißt $\Delta^d = \text{conv}\{p_i : 1 \leq i \leq d+1\} := \{\sum_{i=1}^{d+1} a_i p_i : \sum_{i=1}^{d+1} a_i = 1, a_i \geq 0 \text{ für alle } 1 \leq i \leq d+1\}$ *geometrischer d -Simplex*. Die konvexe Hülle einer beliebigen Teilmenge von $\{p_1, \dots, p_{d+1}\}$ wird als *Seite* von Δ^n bezeichnet.

Definition 1.3.5. Ein *geometrischer simplizialer Komplex* ist eine Menge $\mathcal{C}$ geometrischer Simplexes mit folgenden Eigenschaften:

- (i) Sind $F, G \in \mathcal{C}$, so ist $F \cap G$ sowohl eine Seite von F als auch von G .
- (ii) Ist $F \in \mathcal{C}$ und ist G eine Seite von F , so ist $G \in \mathcal{C}$.

Jeder geometrische simpliziale Komplex ist auf natürliche Art und Weise ein abstrakter simplizialer Komplex auf seiner Eckenmenge. Umgekehrt kann auch jeder abstrakte geometrische simpliziale Komplex als geometrischer simplizialer Komplex realisiert werden.

Konstruktion 1.3.6. Sei Δ ein simplizialer Komplex auf der Eckenmenge $[n]$ und seien $b_1, \dots, b_n$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$. Für eine Teilmenge $\sigma \subseteq [n]$ definieren wir

$$|\sigma| = \text{conv}\{b_i : i \in \sigma\}$$

als die konvexe Hülle der Basisvektoren b_i mit $i \in \sigma$. Ist σ eine m -dimensionale Seite in Δ , so ist $|\sigma|$ entsprechend ein m -dimensionaler geometrischer Simplex im $\mathbb{R}^n$. Wir setzen weiter $|\Delta| = \bigcup_{\sigma \in \Delta} |\sigma|$. Offensichtlich ist $|\Delta|$ ein geometrischer simplicialer Komplex und wir nennen $|\Delta|$ eine *geometrische Realisierung* von Δ .

Beispiel 1.3.7. Sei $e_i = (0, \dots, 0, i, 0, \dots, 0)$ der i -te Einheitsvektor im $\mathbb{R}^n$. Dann ist $\Delta^{n-1} = \text{conv}\{e_i : 1 \leq i \leq n\}$ eine geometrische Realisierung des abstrakten $(n-1)$ -Simplexes.

Da verschiedene geometrische Realisierungen eines simplicialen Komplexes homeomorph sind (bzgl. der induzierten Topologie des $\mathbb{R}^n$) und da wir uns in Anwendungen nur für die Topologie einer geometrischen Realisierung interessieren, werden wir im folgenden immer von „der“ geometrischen Realisierung eines simplicialen Komplexes reden.

Bei der Arbeit mit simplicialen Komplexen interessiert man sich häufig für die Anzahl der Seiten einer gewissen Dimension. Diese Information wird im sog. f -Vektor von Δ gesammelt. Wir setzen $f^\Delta = (f_{-1}^\Delta, \dots, f_{\dim \Delta}^\Delta)$, wobei

$$f_i^\Delta = |\{F \in \Delta : \dim F = i\}|$$

und $f_{-1}^\Delta = 1$ zählt die leere Menge. Wir nennen f^Δ den f -Vektor von Δ und

$$f^\Delta(t) = \sum_{i=0}^{\dim \Delta + 1} f_{i-1}^\Delta t^{\dim \Delta + 1 - i}$$

das f -Polynom von Δ . In bestimmten Anwendungen ist es häufig günstiger nicht den f -Vektor, sondern den sog. h -Vektor $h^\Delta = (h_0^\Delta, \dots, h_d^\Delta)$ von Δ zu betrachten. Dieser berechnet sich aus einer linearen Transformation des f -Vektors wie folgt

$$h_i^\Delta = \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{d-j}{i-j} f_{j-1}^\Delta.$$

Das Polynom $h^\Delta(t) = \sum_{i=0}^d h_i^\Delta t^{d+1-i}$ wird als h -Polynom von Δ bezeichnet. Insbesondere gilt die Relation

$$f^\Delta(t-1) = h^\Delta(t).$$

Beispiel 1.3.8. (i) Für $\Delta = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 3\}\}$ ist der f -Vektor $f^\Delta = (1, 4, 4, 1)$. Der h -Vektor ergibt sich zu $h^\Delta = (1, 1, -1)$.

(ii) Für den $(n-1)$ -Simplex zählt der Eintrag $f_i^{\Delta^{n-1}}$ des f -Vektors Teilmengen von $[n]$ der Kardinalität $i+1$. Es gilt also $f_i^{\Delta^{n-1}} = \binom{n}{i+1}$ für $0 \leq i \leq n-1$. Der h -Vektor berechnet sich als $h^{\Delta^{n-1}} = (1, 0, \dots, 0)$.

1.4 Facetten-Ideale und Stanley-Reisner Ideale

Ziel dieses Abschnitts ist es eine Verbindung zwischen den vorherigen beiden Abschnitten herzustellen, d.h. zwischen quadratfreien monomialen Idealen und simplizialen Komplexen. Insbesondere wird es darum gehen, eine 1 – 1-Korrespondenz zwischen diesen beiden Klassen von Objekten herzustellen und diese auszunutzen, um von Eigenschaften eines Elements der einen Klasse auf Eigenschaften des entsprechenden assoziierten Objekts zu schließen. Dabei wird es zwei verschiedene Möglichkeiten geben, um einen Zusammenhang herzustellen. Im folgenden nehmen wir stets an, dass Δ ein simplizialer Komplex auf der Eckenmenge $[n]$ ist und wie schon im Abschnitt 1.1 bezeichnet $S = k[x_1, \dots, x_n]$ den Polynomring in n Variablen über einem gewöhnlichen Körper k .

Definition 1.4.1. Sei Δ ein simplizialer Komplex mit der Eckenmenge $[n]$.

(i) Wir nennen

$$I_\Delta = \langle x_F = \prod_{i \in F} x_i : F \in \mathcal{N}(\Delta) \rangle$$

das *Stanley-Reisner Ideal* von Δ und $k[\Delta] = S/I_\Delta$ ist der so genannte *Stanley-Reisner Ring* von Δ .

(ii) Das Ideal

$$I(\Delta) = \langle x_F : F \in \mathcal{F}(\Delta) \rangle$$

wird als *Facetten-Ideal* von Δ bezeichnet.

Beispiel 1.4.2. (i) Für $\Delta = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 3\}\}$ ist $I_\Delta = (x_2x_4, x_3x_4) \subsetneq k[x_1, x_2, x_3, x_4]$ und $I(\Delta) = (x_1x_2x_3, x_1x_4) \subsetneq k[x_1, x_2, x_3, x_4]$.

(ii) Für einen $(n-1)$ -Simplex Δ_{n-1} ist $I_{\Delta_{n-1}} = (0) \subsetneq k[x_1, \dots, x_n]$ und $I(\Delta_{n-1}) = (x_1 \cdots x_n)$.

I_Δ und $I(\Delta)$ sind quadratfreie Ideale in S und sie sind zwei Möglichkeiten ein quadratfreies monomiales Ideal zu einem simplizialen Komplex Δ zu assoziieren. Umgekehrt können wir zu einem gegebenen quadratfreien monomialen Ideal I mit $G(I) = \{x^{a_1}, \dots, x_{a_s}\}$ einen simplizialen Komplex auf zwei Arten zuweisen.

Definition 1.4.3. Sei $I \subseteq S$ ein quadratfreies monomiales Ideal mit $G(I) = \{x^{a_1}, \dots, x_{a_s}\}$.

(i) Der simpliziale Komplex Δ_I mit $\mathcal{N}(\Delta) = \{\text{supp}(a_1), \dots, \text{supp}(a_s)\}$ heißt *Stanley-Reisner Komplex* von I . Dabei ist $\text{supp}(a) = \{i : a_i \neq 0\}$ für $a \in \mathbb{Z}^n$. (Insbesondere gilt: $I = I_{\Delta_I}$.)

(ii) Der simpliziale Komplex $\Delta(I)$ mit $\mathcal{F}(\Delta) = \{\text{supp}(a_1), \dots, \text{supp}(a_s)\}$ heißt *Facetten-Komplex* von I . (Insbesondere gilt: $I = I(\Delta(I))$.)

Beispiel 1.4.4. Ist $I = (x_1x_3, x_2x_4, x_1x_3x_5)$, so ist der Stanley-Reisner Komplex Δ_I der Rand eines 4-Ecks mit den Ecken 1, 2, 3, 4, sowie eine zusätzliche Ecke 5, die über Kanten mit 1, 2, 3, 4 verbunden ist. Alle dadurch entstehenden 2-Simplizes außer $\{1, 3, 5\}$ gehören zu dem Stanley-Reisner Komplex.

Zusammenfassend bekommen wir also folgenden Zusammenhang:

$$\begin{aligned}
 \{\text{Quadratfreie monomiale Ideale in } S\} &\rightarrow \{\text{Simpliziale Komplexe mit Eckenmenge } [n]\} \\
 I &\mapsto \Delta(I) \text{ Facetten-Komplex} \\
 \text{Facetten-Ideal } I(\Delta) &\leftrightarrow \Delta \\
 I &\mapsto \Delta_I \text{ Stanley-Reisner Komplex} \\
 \text{Stanley-Reisner Ideal } I_\Delta &\leftrightarrow \Delta
 \end{aligned}$$

Wir kommen nun zu dem Hauptresultat in diesem Abschnitt

Theorem 1.4.5. *Sei Δ ein simplizialer Komplex. Die minimale Primärzerlegung von I_Δ ist*

$$I_\Delta = \bigcap_{F \in \mathcal{F}(\Delta)} P_{[n] \setminus F},$$

wobei $P_G = \langle x_i : i \in G \rangle$ für eine Teilmenge $G \subseteq [n]$.

Beweis. Für ein Monom $u = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ sei $F_u = \{i \in [n] : a_i \neq 0\}$. Es folgt schnell aus der Definition des Stanley-Reisner Ideals, dass $u \in I_\Delta$ genau dann wenn $F_u \notin \Delta$. Wir zeigen zunächst die Inklusion $I_\Delta \subseteq \bigcap_{F \in \mathcal{F}(\Delta)} P_{[n] \setminus F}$. Ist $u \in I_\Delta$, so ist nach obigem $F_u \notin \Delta$ und somit ist F_u in keiner Facette von Δ enthalten. Somit gilt $F_u \cap (F^c) \neq \emptyset$ für alle $F \in \mathcal{F}(\Delta)$, d.h. $u \in P_{F^c}$ für alle $F \in \mathcal{F}(\Delta)$. Damit gilt also $u \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}(\Delta)} P_{[n] \setminus F}$.

Für die umgekehrte Inklusion sei $u \notin I_\Delta$. Nach obigem ist dann $F_u \in \Delta$ und insbesondere existiert eine Facette $F \in \mathcal{F}(\Delta)$ mit $F_u \subseteq F$. Daraus folgt $u \notin P_{F^c} \supset \bigcap_{F \in \mathcal{F}(\Delta)} P_{[n] \setminus F}$. $\square$

Wir sind damit in der Lage die Primärzerlegung eines quadratfreien monomialen Ideals mittels der Kenntnis des zugehörigen Stanley-Reisner Komplexes zu berechnen. Insbesondere ermöglicht uns dies auch die Berechnung der Höhe des Ideals I . Es gilt $I = \min\{|[n] - F| : F \in \mathcal{F}(\Delta)\}$. Entsprechend gibt es jedoch auch eine Möglichkeit die minimale Primärzerlegung eines Facetten-Ideals nur aus der Kenntnis des zugrunde liegenden simplizialen Komplexes zu berechnen. Wir nennen eine Teilmenge $C \subseteq [n]$ eine *Ecken-Überdeckung* von Δ , falls jede Facette $F \in \mathcal{F}(\Delta)$ die Menge C nicht trivial schneidet, d.h. $C \cap F \neq \emptyset$. Eine solche Ecken-Überdeckung C ist *minimal*, falls keine echte Teilmenge von C ebenfalls eine Ecken-Überdeckung von Δ ist.

Theorem 1.4.6. *Seien $C_1, \dots, C_m$ die minimalen Ecken-Überdeckungen von Δ . Dann ist die minimale Primärzerlegung von $I(\Delta)$ gerade*

$$I(\Delta) = \bigcap_{i=1}^m P_{C_i}.$$

2 Cohen-Macaulay Komplexe und schälbare Komplexe

In diesem Kapitel werden wir bestimmte Klassen simplizialer Komplexe betrachten. Insbesondere werden Cohen-Macaulay Komplexe und so genannte schälbare Komplexe eingeführt und miteinander in Beziehung gesetzt.

Cohen-Macaulay Komplexe lassen sich auf verschiedene Arten definieren. Wir wählen in dieser Vorlesung eine Charakterisierung mittels der Homologie eines simplizialen Komplexes. Diese hat den Vorteil, dass sie zum einen in Anwendungen sehr hilfreich ist und zum anderen direkt ersichtlich ist, dass es sich bei der Cohen-Macaulay-Eigenschaft um eine topologische Eigenschaft handelt. Im nun folgenden ersten Abschnitt dieses Kapitels beginnen wir daher mit einer Einführung zu simplizialer Homologie.

2.1 Simpliziale Homologie

Die Resultate in diesem Abschnitt werden weitestgehend ohne Beweise angegeben, da sie lediglich das notwendige Hintergrundwissen für die Arbeit mit simplizialer Homologie liefern sollen.

Sei im folgenden Δ ein simplizialer Komplex auf der Eckenmenge $[n] = \{1, \dots, n\}$ und sei k ein Körper. Für $i \in \mathbb{Z}$ sei $F_i(\Delta)$ die Menge der i -dimensionalen Seiten von Δ . Ferner sei $C_i(\Delta; k)$ ein k -Vektorraum mit Basis $\{e_\sigma : \sigma \in F_i(\Delta)\}$, d.h. die Basiselemente von $C_i(\Delta; k)$ entsprechen den i -dimensionalen Seiten von Δ .

Wir definieren die *Randabbildung* $\partial_i : C_i(\Delta; k) \rightarrow C_{i-1}(\Delta; k)$ folgendermaßen: Für $i \in \mathbb{Z}$ und $\sigma = \{j_1 < \dots < j_{i+1}\} \in F_i(\Delta)$ sei

$$\partial_i(e_\sigma) = \sum_{l=1}^{i+1} (-1)^{l-1} e_{\sigma \setminus \{j_l\}}.$$

Ist $i < -1$ oder $i > n-1$, so ist $C_i(\Delta; k) = 0$ und entsprechend auch $\partial_i = 0$.

Definition 2.1.1. Der *Kettenkomplex* von Δ über k ist der Komplex $\mathcal{C}_\bullet(\Delta; k)$:

$$0 \rightarrow C_{n-1}(\Delta; k) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \rightarrow C_i(\Delta; k) \xrightarrow{\partial_i} C_{i-1}(\Delta; k) \xrightarrow{\partial_{i-1}} \dots \xrightarrow{\partial_0} C_{-1}(\Delta; k) \rightarrow 0.$$

Bemerkung 2.1.2. Man rechnet nach, dass der gerade definierte Komplex wirklich die definierende Eigenschaft eines sog. Komplexes erfüllt, d.h. es gilt: $\partial_{i-1} \circ \partial_i = 0$ für $0 \leq i \leq$

$\dim \Delta + 1$. Mit anderen Worten ist das Bild der i -ten Randabbildung im Kern der $(i - 1)$ -ten Randabbildung enthalten.

Definition 2.1.3. Für $i \in \mathbb{Z}$ sei

$$\tilde{H}_i(\Delta; k) = \text{Ker}(\partial_i) / \text{Im}(\partial_{i+1}).$$

Wir nennen $\tilde{H}_i(\Delta; k)$ die i -te *reduzierte Homologiegruppe* von Δ über k . Elemente in $\text{Ker}(\partial_i)$ werden als *i -Zykel*, Elemente in $\text{Im}(\partial_i)$ als *i -Ränder* bezeichnet.

Wir werden nun die Homologiegruppen für ein Beispiel explizit berechnen.

Beispiel 2.1.4. Sei Δ gegeben mit Facettenmenge $\mathcal{F}(\Delta) = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 5\}, \{6\}, \{7\}\}$. Es gilt

$$\begin{aligned} F_{-1}(\Delta) &= \{\emptyset\} \\ F_0(\Delta) &= \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{7\}\} \\ F_1(\Delta) &= \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 5\}\} \\ F_2(\Delta) &= \{\{1, 2, 3\}\} \end{aligned}$$

Als Kettenkomplex erhalten wir

$$0 \rightarrow k \xrightarrow{\partial_2} k^6 \xrightarrow{\partial_1} k^7 \xrightarrow{\partial_0} k \rightarrow 0$$

$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
 $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Die Abbildungen ∂_0 und ∂_2 haben beide Rang 1 und sind daher surjektiv bzw. injektiv. Damit gilt $\text{Ker} \partial_0 \cong k^6$ und $\text{Im} \partial_2 \cong k$. Die Matrix ∂_1 hat Rang 4, woraus folgt, dass $\text{Ker} \partial_1 \cong k^{6-4} = k^2$ und $\text{Im} \partial_1 \cong k^4$. Insgesamt erhalten wir damit: $\tilde{H}_0(\Delta; k) = k^{6-4} = k^2$, $\tilde{H}_1(\Delta; k) = k^{2-1} = k$ und alle anderen Homologiegruppen verschwinden.

Prinzipiell kann man sich vorstellen, dass die i -te Homologiegruppe die Anzahl der i -dimensionalen Sphären („Löcher“) in einem Komplex zählt. Ferner kann man zeigen, dass die 0-te Homologiegruppe durch die Anzahl der Zusammenhangskomponenten bestimmt ist. Homologiegruppen lassen sich nicht nur für simpliziale Komplexe definieren, sondern allgemeiner für einen beliebigen topologischen Raum. Eine Möglichkeit dies zu tun, ist einen topologischen Raum zu triangulieren und die Homologie des zur Triangulierung gehörenden simplizialen Komplexes zu berechnen. Dabei müssen Seiten von Simplexes nicht gerade sein,

sondern sie können durchaus „gebogen“ sein. Wenn wir im folgenden von der Homologie eines Raumes sprechen, meinen wir immer die Homologie, die sich mittels einer gewählten Triangulierung berechnet. Wichtig und a priori nicht klar ist, dass die Homologie nicht von der gewählten Triangulierung abhängt. Insbesondere bedeutet dies auch, dass simpliciale Komplexe mit homoemorphen geometrischen Realisierungen dieselbe Homologie haben, d.h. diese hängt nur von der geometrischen Realisierung ab.

Für die Berechnung von Homologiegruppen kann es hilfreich sein den jeweiligen Raum erst in geeigneter Art und Weise zu deformieren und mit Hilfe der Homologie des deformierten Raumes die Homologie des Ausgangsraumes zu berechnen. Eine in Anwendungen besonders wichtige Klasse von Deformationen, die die Homologie eines topologischen Raumes nicht ändern, sind die folgenden.

Definition 2.1.5. Seien X, Y topologische Räume.

- (i) Eine *Homotopie* ist eine Familie von Abbildungen $f_t : X \rightarrow Y$, $0 \leq t \leq 1$, so dass die Abbildung $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y : (x, t) \mapsto F(x, t) = f_t(x)$ stetig ist.
- (ii) Zwei Abbildungen $f, g : X \rightarrow Y$ sind *homotop*, falls eine Homotopie $f_t : X \rightarrow Y$, $0 \leq t \leq 1$, existiert mit $f_0 = f$ und $f_1 = g$. Man schreibt $f \simeq g$.
- (iii) Ein *Deformationsretrakt* von X zu einem Unterraum $A \subseteq X$ ist eine Homotopie $f_t : X \rightarrow X$, $0 \leq t \leq 1$, so dass $f_0 = \mathbb{1}_X$ (die Identität), $f_1(X) = A$ und $f_t|_A = \mathbb{1}_A$.
- (iv) Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt *Homotopieäquivalenz*, falls eine Abbildung $g : Y \rightarrow X$ existiert, so dass $fg \simeq \mathbb{1}$ und $gf \simeq \mathbb{1}$. In diesem Fall heißen X und Y *homotopieäquivalent* bzw. man sagt, dass sie den selben *Homotopietyp* haben.

Anschaulich sind zwei Räume homotopieäquivalent, falls sie sich auf stetige Art und Weise in einander verformen lassen. Ist $f_t : X \rightarrow X$, $0 \leq t \leq 1$, ein Deformationsretrakt von X zu einem Unterraum A , so ist $f_1 : X \rightarrow A$ eine Homotopieäquivalenz. Wenn man $g : A \rightarrow X$ als Inklusion wählt, so gilt $f_1 g = 1_A$ und $g f_1 \simeq 1_X$, wobei letztere Homotopie durch f_t gegeben ist. Die Resultate in diesem Abschnitt werden meist ohne Beweis angegeben, da wir sie lediglich als Werkzeuge verwenden werden.

Satz 2.1.6. Sei Δ ein simplicialer Komplex mit Zusammenhangskomponenten $\Delta_1, \dots, \Delta_s$. Dann gilt $\tilde{H}_0(\Delta; k) = k^{s-1}$ und $\tilde{H}_i(\Delta; k) = \bigoplus_{j=1}^s \tilde{H}_i(\Delta_j; k)$ für $i \geq 1$.

Satz 2.1.7. Sind Δ und Γ simpliciale Komplexe, so dass $|\Delta|$ und $|\Gamma|$ homotopieäquivalent sind, so gilt $\tilde{H}_i(\Delta; k) = \tilde{H}_i(\Gamma; k)$ für alle i .

Topologische Räume, die uns häufig begegnen sind solche, die homeomorph zu einem Ball oder einer Sphäre sind. Für $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 1$, sei

$$\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$$

der n -dimensionale Einheitsball im $\mathbb{R}^n$ und sei

$$\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$$

die $(n-1)$ -dimensionale Einheitssphäre im $\mathbb{R}^{n+1}$.

Satz 2.1.8. *Sei Δ ein simplizialer Komplex.*

(i) *Ist $|\Delta|$ homotopieäquivalent zu $\mathbb{S}^n$, so gilt*

$$\tilde{H}_i(\Delta; k) = \begin{cases} k, & \text{falls } i = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

(ii) *Ist $|\Delta|$ homotopieäquivalent zu $\mathbb{B}^n$, so gilt $\tilde{H}_i(\Delta; k) = 0$ für alle i .*

Die Konsequenzen obigen Satzes gelten insbesondere, wenn sich die geometrische Realisierung eines simplizialen Komplexes zu einer Sphäre oder einem Ball retrahieren lässt bzw. homeomorph dazu ist.

Bemerkung 2.1.9. Ein topologischer Raum X , der den Homotopietyp eines Punktes hat, heißt X *zusammenziehbar*. Anschaulich bedeutet dies, dass X sich auf stetige Art und Weise zu einem Punkt kontrahieren lässt. Insbesondere ist jeder Ball zusammenziehbar. Satz 2.1.7 impliziert damit auch, dass die Homologiegruppen eines aus einem einzigen Punkt bestehenden simplizialen Komplexes trivial sind. Der vorige Satz impliziert damit auch, dass die geometrische Realisierung eines $(d-1)$ -Simplexes zusammenziehbar ist. Eine äquivalente Charakterisierung ist die, dass die Identitätsabbildung auf X homotop zu einer konstanten Abbildung ist.

Um zu zeigen, dass ein topologischer Raum homotopieäquivalent zu einem anderen (leichter verständlichen) ist, kann es hilfreich sein, zunächst einen zusammenziehbaren Unterraum zu identifizieren und dann den sich daraus ergebenden Quotientenraum zu betrachten. Oftmals lässt sich der Homotopietyp dieses Quotienten leichter bestimmen. Unter bestimmten Voraussetzungen hat der Ausgangsraum zudem den selben Homotopietyp wie der Quotient.

Definition 2.1.10. (i) Sei X ein topologischer Raum und sei $A \subseteq X$. Wir definieren die Äquivalenzrelation $\sim$ durch $x \sim y$, genau dann wenn $x = y$ oder $x, y \in A$. Der sog. *Quotienten- oder Identifikationsraum* von X bzgl. A ist die Menge der Äquivalenzklassen bzgl. der Äquivalenzrelation $\sim$.

(ii) Gegeben topologische Räume X_α mit Basispunkten x_α definiert man die *Einpunkt-Verbindung* $\vee X_\alpha$ der Räume X_α als Quotient der disjunkten Vereinigung $\bigcup_\alpha X_\alpha / \{x_\alpha : \alpha\}$, der durch Identifizierung der Punkte x_α erhalten wird.

Anschaulich werden bei der Bildung eines Quotientenraumes gewisse Punkte in einem topologischen Raum miteinander identifiziert. Beispielsweise ist $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ homeomorph zu den Konturen einer 8.

Ein in Anwendungen sehr hilfreiches Resultat ist das folgende.

Theorem 2.1.11. *Sei Δ ein simplizialer Komplex, dessen geometrische Realisierung homotopieäquivalent zu einer Einpunkt-Verbindung von Sphären ist mit r_i Sphären der Dimension i . Dann gilt für alle $0 \leq i \leq \dim \Delta$*

$$\tilde{H}_i(\Delta; k) \cong k^{r_i}$$

Eines der Resultate, die wir häufig verwenden werden, ist das folgende.

Satz 2.1.12. *Sei Δ ein simplizialer Komplex und sei Γ ein Unterkomplex von Δ , dessen geometrische Realisierung zusammenziehbar ist. Dann sind $|\Delta|$ und $|\Delta|/|\Gamma|$ homotopieäquivalent.*

Ist der betrachtete Unterkomplex nicht zusammenziehbar, so ist die Situation meist etwas komplizierter, in einfachen Fällen können wir dennoch etwas aussagen.

Satz 2.1.13. *Der Quotient $\mathbb{B}^n/\mathbb{S}^{n-1}$ ist homotopieäquivalent zu $\mathbb{S}^n$.*

Anschaulich besagt der vorhergehende Satz, wenn wir die Punkte im Rand eines n -dimensionalen Balles identifizieren, erhalten wir eine n -dimensionale Sphäre. Beispielsweise erhalten wir eine 2-Sphäre (d.h. den Rand einer Weltkugel), wenn wir die Punkte im Rand einer Scheibe zu einem Punkt verkleben.

2.2 Die Cohen-Macaulay Eigenschaft

Ziel dieses Abschnitts ist die Cohen-Macaulay Eigenschaft eines simplizialen Komplexes einzuführen und zu verstehen. In späteren Kapiteln werden wir herausarbeiten, warum Cohen-Macaulay Komplexe eine besonders wichtige Klasse simplizialer Komplexe darstellen. Klassisch ist die Cohen-Macaulay Eigenschaft zunächst für Ringe und Moduln definiert. Entsprechend nennt man einen simplizialen Komplex Cohen-Macaulay über k , falls der Stanley-Reisner Ring diese Eigenschaft hat. Für praktische Anwendungen ist eine äquivalente Definition mittels der simplizialen Homologie des simplizialen Komplexes, sowie gewisser Unterkomplexe häufig jedoch günstiger.

Definition 2.2.1. Sei Δ ein simplizialer Komplex auf der Eckenmenge $[n]$.

(i) Δ heißt *rein*, falls alle Facetten die selbe Dimension haben.

(ii) Für eine Seite $F \in \Delta$ definieren wir

$$\text{lk}_\Delta(F) = \{G \in \Delta : F \cup G \in \Delta, F \cap G = \emptyset\}$$

und nennen diesen simplizialen Komplex den *Link von F in Δ* .

Man kann leicht zeigen, dass $\text{lk}_\Delta(F)$ in der Tat wieder ein simplizialer Komplex ist. Der Link einer Facette ist immer der simpliziale Komplex, der die leere Seite enthält. Der Link der leeren Menge ist immer der gesamte simpliziale Komplex Δ . Wir geben nun noch einige Beispiele an.

Beispiel 2.2.2. Wir betrachten wieder den simplizialen Komplex aus Beispiel 1.3.2 (i). Wir erhalten folgende Links:

$$\begin{aligned}
 \text{lk}_\Delta(\emptyset) &= \Delta \\
 \text{lk}_\Delta(\{1\}) &= \{\{2, 3\}, \{4\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \emptyset\} \\
 \text{lk}_\Delta(\{2\}) &= \{\{1, 3\}, \{1\}, \{3\}, \emptyset\} \\
 \text{lk}_\Delta(\{3\}) &= \{\{1, 2\}, \{1\}, \{2\}, \emptyset\} \\
 \text{lk}_\Delta(\{4\}) &= \{\{1\}, \emptyset\} \\
 \text{lk}_\Delta(\{1, 2\}) &= \{\{3\}, \emptyset\} \\
 \text{lk}_\Delta(\{1, 3\}) &= \{\{2\}, \emptyset\} \\
 \text{lk}_\Delta(\{2, 3\}) &= \{\{1\}, \emptyset\} \\
 \text{lk}_\Delta(\{1, 4\}) &= \{\emptyset\} \\
 \text{lk}_\Delta(\{1, 2, 3\}) &= \{\emptyset\}.
 \end{aligned}$$

Die Definition für Cohen-Macaulayness, die wir verwenden werden, ist nun die folgende.

Definition 2.2.3 (Reisner Kriterium). Sei Δ ein reiner $(d - 1)$ -dimensionaler simplizialer Komplex. Wir nennen Δ *Cohen-Macaulay* über k , falls $\tilde{H}_i(\text{lk}_\Delta(F); k) = 0$ für alle $0 \leq i < \dim \text{lk}_\Delta(F)$ und alle $F \in \Delta$.

Anschaulich besagt die Cohen-Macaulay Eigenschaft für einen simplizialen Komplex Δ , dass Δ , sowohl global als auch lokal die Homologie einer Einpunkt-Verbindung von Sphären (der entsprechenden Dimension) hat oder zusammenziehbar ist. Wir betrachten nun noch ein paar Beispiele.

Beispiel 2.2.4. (i) Sei Δ der simpliziale Komplex auf der Eckenmenge $[5]$ mit Facettenmenge $\mathcal{F}(\Delta) = \{\{1, 2, 3\}, \{3, 4, 5\}\}$. Dann ist $\mathcal{F}(\text{lk}_\Delta(\{3\})) = \{\{1, 2\}, \{4, 5\}\}$ und damit unzusammenhängend. Aus Satz 2.1.6 folgt dann aber $\tilde{H}_0(\text{lk}_\Delta(\{3\}); k) = k$. Wegen $\dim \text{lk}_\Delta(\{3\}) = 1 > 0$ kann Δ dann aber nicht Cohen-Macaulay sein.

(ii) Sei Δ der simpliziale Komplex auf der Eckenmenge $[6]$ mit Facettenmenge $\mathcal{F}(\Delta) = \{\{1, 2, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{1, 3, 6\}\}$. Wir können die geometrische Realisierung von Δ durch „zusammendrücken“ zu dem Rand eines Dreiecks retrahieren, welches wiederum homöomorph zu einer $\mathbb{S}^1$ ist. Aus Satz 2.1.7 und Satz 2.1.8 folgt damit $\tilde{H}_1(\Delta; k) = k$ und wegen $\dim \Delta = 2$ kann Δ damit nicht Cohen-Macaulay sein.

(iii) Sei Δ der simpliziale Komplex aus (ii), aber noch mit einer zusätzlichen Facette $\{1, 2, 3\}$. In diesem Fall ist Δ homöomorph zu $\mathbb{B}^2$ und hat nach Satz 2.1.7 und Satz 2.1.8 triviale Homologie. Die Links der Ecken 4, 5 und 6 sind jeweils einzelne Kanten, die Links der Ecken 1, 2 und 3 bestehen aus je drei zusammenhängenden Kanten. Sowohl einzelne als auch mehrere zusammenhängende Kanten sind jedoch homöomorph zu $\mathbb{B}^1$ und Satz 2.1.7 und Satz 2.1.8 implizieren damit, dass die Homologie der Links der Ecken

trivial ist. Bei den Links der Kanten handelt es sich um 0-dimensionale simpliziale Komplexe. Letztere können aber nur in Dimension 0 nicht-triviale Homologiegruppen haben. Insgesamt folgt damit, dass der betrachtete simpliziale Komplex Cohen-Macaulay ist.

Im folgenden wollen wir noch 0-dimensionale und 1-dimensionale simpliziale Komplexe charakterisieren.

Satz 2.2.5. (i) *Jeder 0-dimensionale simpliziale Komplex ist Cohen-Macaulay.*

(ii) *Ein 1-dimensionaler simplizialer Komplex ist genau dann Cohen-Macaulay, wenn er zusammenhängend ist.*

Beweis. Beweis von (i): Ist Δ 0-dimensional, so besteht Δ nur aus Ecken. Ohne Einschränkung habe Δ die Eckenmenge $[n]$. Der Link jeder Ecke ist der simpliziale Komplex, der die leere Menge enthält, ist also -1 -dimensional und es ist nichts zu zeigen. Es ist ferner $\text{lk}_\Delta(\{\emptyset\}) = \Delta$ und wegen $\dim \Delta = 0$ ist auch in diesem Fall nichts zu zeigen. Insgesamt folgt, dass Δ Cohen-Macaulay ist.

Beweis von (ii): Sei zunächst Δ ein 1-dimensionaler simplizialer Komplex, der Cohen-Macaulay ist. Wäre Δ nicht zusammenhängend, so würde aus Satz 2.1.6 folgen, dass $\dim_k \tilde{H}_0(\Delta; k) \geq 1$, insbesondere also $\tilde{H}_0(\Delta; k) \neq 0$ und dies stellt einen Widerspruch zum Reisner Kriterium dar.

Sei nun umgekehrt Δ ein zusammenhängender 1-dimensionaler simplizialer Komplex. Dann folgt zunächst, dass Δ rein sein muss. Andernfalls gäbe es mindestens eine Ecke und mindestens eine Kante, die beide Facetten sind. Da solche Ecken isoliert sein müssen, wäre Δ nicht zusammenhängend. Weiter folgt aus Satz 2.1.6, dass $\tilde{H}_0(\Delta; k) = 0$ gilt. Damit ist wegen $\dim \Delta = 1$ die Bedingung aus dem Reisner Kriterium für $F = \emptyset$ erfüllt. Ist $F \in \Delta$ mit $\dim F = 1$, so ist $\text{lk}_\Delta(F) = \{\emptyset\}$ und wie in (i) folgt, dass in diesem Fall die Bedingung aus dem Reisner Kriterium erfüllt ist. Ist $F \in \Delta$ eine Ecke, so besteht $\text{lk}_\Delta(F)$ aus einer Menge von Ecken und wie in (i) folgt auch hier wieder, dass die Bedingung aus dem Reisner Kriterium erfüllt ist. Insgesamt ist Δ also Cohen-Macaulay. $\square$

Der erste Teil des Beweises von (ii) zeigt insbesondere folgendes Resultat.

Korollar 2.2.6. *Sei Δ ein Cohen-Macaulay Komplex und $\dim \Delta \geq 1$. Dann ist Δ zusammenhängend.*

2.3 Schälbare simpliziale Komplexe

Das Ziel dieses Abschnitts ist es eine stärkere Eigenschaft als die Cohen-Macaulay-Eigenschaft einzuführen, die lediglich von der Kombinatorik des jeweiligen simplizialen Komplexes abhängt und nicht mehr von dem Körper k .

Wir benötigen zunächst noch eine Notation. Gegeben seien Teilmengen $F_1, \dots, F_m \subseteq [n]$. Dann schreiben wir $\langle F_1, \dots, F_m \rangle$ für den simplizialen Komplex mit Facettenmenge $\{F_1, \dots, F_m\}$,

d.h.

$$\langle F_1, \dots, F_m \rangle = \{F \subseteq [n] : \text{Es existiert ein } 1 \leq i \leq m, \text{ so dass } F \subseteq F_i\}.$$

Definition 2.3.1. Sei Δ ein reiner $(d-1)$ -dimensionaler simplizialer Komplex. Δ heißt *schälbar*, falls es eine Ordnung der Facetten $F_1, \dots, F_m$ von Δ gibt, so dass die folgenden äquivalenten Bedingungen gelten:

- (i) Die Menge $\{F \mid F \in \langle F_1, \dots, F_i \rangle \setminus \langle F_1, \dots, F_{i-1} \rangle\}$ hat ein eindeutiges minimales Element für alle $2 \leq i \leq m$. Dieses Element wird als *Einschränkungsseite* von F_i bezeichnet (geschrieben $\text{res}(F)$).
- (ii) $\langle F_i \rangle \cap \langle F_1, \dots, F_{i-1} \rangle$ ist ein $(d-2)$ -dimensionaler reiner Unterkomplex von $\langle F_i \rangle$ für $2 \leq i \leq m$.
- (iii) Für alle $1 \leq j < i \leq m$ existiert ein $v \in F_i \setminus F_j$ und ein $1 \leq k \leq i-1$, so dass $F_i \setminus F_k = \{v\}$.

Wir nennen eine Ordnung der Facetten mit den gegebenen Eigenschaften eine *Schälordnung* von Δ .

Einerseits sind viele verschiedene Klassen simplizialer Komplexe schälbar und andererseits haben schälbare Komplexe sehr schöne Eigenschaften. Es folgt direkt aus der Definition von Schälbarkeit, dass jeder simpliziale Komplex, der sich durch sukzessives Hinzufügen von Facetten in einer Schälung ergibt, erneut schälbar ist. Diese Eigenschaft ermöglicht es häufig Aussagen über schälbare simpliziale Komplexe mittels Induktion zu beweisen. Wir werden im Rest dieses Abschnitts zeigen, dass schälbare Komplexe Cohen-Macaulay über jedem Körper k sind. Zunächst geben wir ein Beispiel für einen schälbaren simplizialen Komplex an.

- Beispiel 2.3.2.** (i) Sei Δ der simpliziale Komplex auf der Eckenmenge $[5]$ mit Facetten $F_1 := \{1, 2, 5\}$, $F_2 := \{2, 3, 5\}$, $F_3 := \{3, 4, 5\}$ und $F_4 := \{1, 4, 5\}$. Dann ist Δ schälbar und die Ordnung F_1, F_2, F_3, F_4 ist eine Schälordnung. Andererseits kann keine Schälordnung mit den Facetten F_1, F_3 beginnen, da es beim Hinzufügen von F_3 zwei minimale Seiten gibt – die Ecken 3 und 4. In einer Schälordnung darf es nur eine solche Ecke geben. Dies zeigt auch, dass der simpliziale Komplex $\langle F_1, F_3 \rangle$ nicht schälbar ist.
- (ii) Sei Δ eine Triangulierung der projektiven Ebene. Dann kann man zeigen, dass Δ nicht Cohen-Macaulay ist über k , falls k ein Körper der Charakteristik 2 ist. Wir werden sehen, dass Δ dann nicht schälbar sein kann.

Beispiel 2.3.2 zeigt bereits, dass nicht jede Ordnung der Facetten eines schälbaren Komplexes eine Schälordnung liefert. Man sieht jedoch leicht, dass gewisse „Umordnungen“ durchaus möglich sind.

Lemma 2.3.3. [Umordnungslemma] Sei Δ ein schälbarer simplizialer Komplex und sei $F_1, \dots, F_m$ eine Schälordnung von Δ . Sei $F_{i_1}, \dots, F_{i_m}$ die Umordnung dieser Ordnung, in der erst alle Facetten F mit $\text{res}(F) \neq F$ in der induzierten Ordnung genommen werden und dann die restlichen Facetten in beliebiger Ordnung hinzugefügt werden. Dann ist $F_{i_1}, \dots, F_{i_m}$ eine Schälordnung von Δ . Weiterhin hat jede Facette F in beiden Schälordnungen die selbe Einschränkungsseite.

Beweis. Dies folgt direkt aus der Definition von Schälbarkeit. $\square$

Eine schöne Eigenschaft schälbarer Komplexe ist beispielsweise, dass sich ihr h -Vektor kombinatorisch interpretieren lässt.

Theorem 2.3.4. *Sei Δ ein $(d-1)$ -dimensionaler schälbarer simplizialer Komplex auf der Eckenmenge $[n]$ mit h -Vektor $h^\Delta = (h_0^\Delta, h_1^\Delta, \dots, h_d^\Delta)$. Sei $F_1, \dots, F_m$ eine Schälordnung von Δ . Setze $\text{res}(F_1) = \emptyset$. Dann gilt*

$$h_i = |\{j \mid |\text{res}(F_j)| = i\}|$$

für $0 \leq i \leq d$.

Wir verschieben den Beweis dieses Theorems auf ein späteres Kapitel. Insbesondere zeigt das obige Ergebnis, dass h -Vektoren schälbarer simplizialer Komplexe nur nicht negative Einträge besitzen.

Das Hauptergebnis dieses Abschnittes ist das folgende:

Theorem 2.3.5. *Sei Δ ein schälbarer simplizialer Komplex. Dann ist Δ Cohen-Macaulay über jedem Körper k .*

Der Beweis hierzu wird in mehreren Schritten erfolgen. Wir zeigen zunächst, dass jeder schälbare Komplex homotopieäquivalent zu einer Einpunkt-Verbindung von Sphären ist und im nächsten Schritt, dass der Link jeder Seite eines schälbaren Komplexes erneut schälbar ist. Durch Anwendung von Theorem 2.1.11 folgt dann direkt mit der Definition von Cohen-Macaulayness die Behauptung.

Theorem 2.3.6. *Sei Δ ein $(d-1)$ -dimensionaler schälbarer simplizialer Komplex mit h -Vektor $h^\Delta = (h_0^\Delta, h_1^\Delta, \dots, h_{d-1}^\Delta, h_d^\Delta)$. Dann ist Δ homotopieäquivalent zu einer Einpunkt-Verbindung von h_d^Δ -vielen $(d-1)$ -dimensionalen Sphären. Insbesondere gilt*

$$\tilde{H}_i(\Delta; k) = \begin{cases} k^{h_d^\Delta}, & \text{falls } i = d-1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Für eine gegebene beliebige Schälordnung von Δ , sei $\Gamma := \{F \in \mathcal{F}(\Delta) : \text{res}(F) = F\}$ die Menge der Facetten mit maximaler Einschränkungseite und sei $\tilde{\Delta} = \Delta \setminus \Gamma$. Gemäß Lemma 2.3.3 ist die induzierte Ordnung der verbleibenden Facetten von Δ eine Schälordnung von $\tilde{\Delta}$. Bezeichne $F_1, \dots, F_m$ diese Schälordnung. Sei $\Delta_k^* = \langle F_1, \dots, F_k \rangle$ für $1 \leq k \leq m$. Die Facette F_k ist die einzige Facette in Δ_k^* , die die Einschränkungseite $\text{res}(F_k)$ von F_k enthält und per Konstruktion gilt $\text{res}(F_k) \neq F_k$. Insbesondere sind auch alle Seiten, die $\text{res}(F_k)$ enthalten, nur in einer einzigen Facette in Δ_k^* enthalten, nämlich in F_k . Daraus folgt, dass wir durch entfernen eben solcher Seiten, d.h. $\text{res}(F_k)$ und aller Seiten, die $\text{res}(F_k)$ enthalten, $|\Delta_k^*|$ zu $|\Delta_{k-1}^*|$ retrahieren können, d.h. $|\Delta_{k-1}^*|$ und $|\Delta_k^*|$ sind homotopieäquivalent. (In der Tat ist $|\Delta_{k-1}^*|$ sogar ein Deformationsretrakt von $|\Delta_k^*|$.) Durch Iteration von diesem Prozess folgt schließlich, dass $|\Delta^*|$ homotopieäquivalent zu $|\Delta_1^*|$ ist. Da $|\Delta_1^*|$ als $(d-1)$ -Simplex homeomorph zu einem Ball ist,

folgt aus Satz 2.1.7 und Bemerkung 2.1.9, dass $|\Delta^*|$ zusammenziehbar ist. Wegen Satz 2.1.12 können wir weiter schließen, dass $|\Delta|/|\Delta^*|$ und $|\Delta|$ homotopieäquivalent sind. Wenn wir $|\Delta|$ aus $|\Delta^*|$ gemäß der betrachteten Schälordnung konstruieren, wird in jedem Schritt ein Simplex aus Γ hinzugefügt, dessen gesamter Rand bereits vorhanden ist (da $\text{res}(F) = F$ für alle $F \in \Gamma$). Bei Kontraktion von Δ^* wird der Rand jedes $F \in \Gamma$ also zu einem einzigen Punkt identifiziert, so dass wir wegen Satz 2.1.13 in der geometrischen Realisierung $|\Delta|$ für jedes $F \in \Gamma$ eine $(d-1)$ -Sphäre erhalten. Ferner sind diese Sphären in einem ausgezeichneten Punkt, der ein Repräsentant von $|\Delta^*|/|\Delta^*|$ ist, miteinander verklebt. Außerhalb dieses Punktes gibt es jedoch keine Überschneidungen zwischen den Sphären. Dies zeigt schließlich, dass $|\Delta|$ homotopieäquivalent zu einer Einpunkt-Verbindung von $|\Gamma|$ -vielen $(d-1)$ -dimensionalen Sphären ist. Aus Theorem 2.3.4 können wir folgern, dass $|\Gamma| = h_d$. Der letzte Teil des Theorems folgt aus Theorem 2.1.11. $\square$

Wie bereits erwähnt, benötigen wir weiterhin, dass Links von Seiten schälbarer Komplexe erneut schälbar sind.

Lemma 2.3.7. *Sei Δ ein schälbarer simplizialer Komplex. Dann ist für jede Seite $F \in \Delta$ der Link $\text{lk}_\Delta(F)$ schälbar.*

Beweis. Sei $F \in \Delta$. Wir bemerken zunächst, dass $\text{lk}_\Delta(F)$ ein reiner $(d-1-|F|)$ -dimensionaler simplizialer Komplex ist. Sei $F_1, \dots, F_s$ eine Schälordnung von Δ . Seien weiter $G_1, \dots, G_m$ die Facetten von Δ , die F enthalten und ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien sie der Reihenfolge geordnet, wie sie in der Schälordnung $F_1, \dots, F_m$ auftreten. Wir zeigen nun, dass $G_1 \setminus F, \dots, G_m \setminus F$ eine Schälordnung von $\text{lk}_\Delta(F)$ ist, indem wir Bedingung (ii) aus 2.3.1 überprüfen. Offensichtlich gilt $G_i \setminus F \in \text{lk}_\Delta(F)$. Sei $2 \leq i \leq m$. Wir müssen zeigen, dass $\langle G_1 \setminus F, \dots, G_{i-1} \setminus F \rangle \cap \langle G_i \setminus F \rangle$ ein reiner $(\dim \text{lk}_\Delta(F) - 1) = (d-2-|F|)$ -dimensionaler Unterkomplex von $\langle G_i \setminus F \rangle$ ist. Angenommen es existiert eine Facette H von $\langle G_1 \setminus F, \dots, G_{i-1} \setminus F \rangle \cap \langle G_i \setminus F \rangle$ mit $\dim H < d-2-|F|$. Dann ist $H \cup F$ eine Facette in $\langle G_1, \dots, G_{i-1} \rangle \cap \langle G_i \rangle$ der Dimension $< d-2$. Da $F_1, \dots, F_m$ eine Schälordnung von Δ ist, existiert dann jedoch eine Facette $G \supsetneq F$, die in der Schälordnung vor G_i auftritt und, so dass $\dim(G \cap G_i) = d-2$ und $G \cap G_i \supseteq H \cup F$. Insbesondere gilt also $F \subseteq G$ und somit $G \in \text{lk}_\Delta(F)$. Dies ergibt einen Widerspruch und es folgt, dass jede Facette in $\langle G_1 \setminus F, \dots, G_{i-1} \setminus F \rangle \cap \langle G_i \setminus F \rangle$ die Dimension $d-2-|F|$ haben muss. Dies zeigt, dass $\text{lk}_\Delta(F)$ schälbar ist. $\square$

Wir können schließlich den Beweis von Theorem 2.3.5 angeben.

Beweis von Theorem 2.3.5 Sei $F \in \Delta$. Wir müssen zeigen, dass $\tilde{H}_i(\text{lk}_\Delta(F); k) = 0$ für alle $0 \leq i \leq \dim \text{lk}_\Delta(F)$. Ist $F = \emptyset$, also $\text{lk}_\Delta(F) = \Delta$, so folgt die Behauptung direkt aus Theorem 2.3.6. Ist $F \neq \emptyset$, so ist $\text{lk}_\Delta(F)$ schälbar wegen Lemma 2.3.7 und Theorem 2.3.6 angewandt auf $\text{lk}_\Delta(F)$ liefert $\tilde{H}_i(\text{lk}_\Delta(F); k) = 0$ für alle $0 \leq i \leq \dim \text{lk}_\Delta(F)$. Daraus folgt direkt, dass Δ Cohen-Macaulay ist. $\square$

3 Hilbert-Funktionen und die Theoreme von Kruskal-Katona und Macaulay

Im Fokus dieses Kapitels steht die Charakterisierung der möglichen f -Vektoren simplizialer Komplexe und noch allgemeiner von sog. Multikomplexen. Dies wird von den Theoremen von Kruskal-Katona bzw. von Macaulay geleistet, die notwendige und hinreichende numerische Bedingungen angeben, damit ein ganzzahliger Vektor der f -Vektor eines simplizialen Komplexes bzw. eines Multikomplexes ist. Das Theorem von Macaulay liefert zusätzlich noch eine Charakterisierung der h -Vektoren Cohen-Macaulay simplizialer Komplexe.

3.1 f - und h -Vektoren und Hilbert-Reihen

Wir wiederholen zunächst einige Definitionen.

Definition 3.1.1. Sei Δ ein $(d-1)$ -dimensionaler simplizialer Komplex. Dann setzen wir für $-1 \leq i \leq d-1$

$$f_i^\Delta = \#\{F \in \Delta : \dim F = i\}$$

und der Vektor $f^\Delta = (f_{-1}^\Delta, f_0^\Delta, \dots, f_{d-1}^\Delta)$ heißt f -Vektor von Δ .

Es gilt stets $f_{-1}^\Delta = 1$. Dieser Eintrag zählt die leere Menge.

Beispiel 3.1.2.

- (i) Der simpliziale Komplex Δ aus Beispiel 1.3.2 (i) hat den f -Vektor $f^\Delta = (1, 4, 4, 1)$.
- (ii) Für den $(d-1)$ -Simplex Δ_{d-1} gilt $f_i^\Delta = \binom{d}{i+1}$ für $-1 \leq i \leq d-1$.

Unser Ziel wird es im folgenden sein, die Vektoren $f = (f_{-1}, f_0, \dots, f_{d-1}) \in \mathbb{N}^{d+1}$ zu klassifizieren, so dass ein simplizialer Komplex Δ existiert mit $f^\Delta = f$.

Beispiel 3.1.3. Wir betrachten $f = (1, 4, 5, 3)$. Ist Δ ein simplizialer mit 4 Ecken und 3 2-dimensionalen Seiten, so ist leicht zu sehen, dass es 6 Kanten geben muss. Der angegebene Vektor f kann also kein f -Vektor eines simplizialen Komplexes sein. Ist hingegen $f = (1, 4, 6, 3)$, so lässt sich dies realisieren als f -Vektor des simplizialen Komplexes auf der Eckenmenge $[4]$ mit Facetten $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$ und $\{1, 3, 4\}$.

Die Klassifizierung von f -Vektoren simplizialer Komplexe, wie sie durch den Satz von Kruskal-Katona geliefert werden wird, hat auch noch eine algebraische Motivation.

Definition 3.1.4. Ist Δ ein simplizialer Komplex auf der Eckenmenge $[n]$ und ist $I_\Delta \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ das Stanley-Reisner Ideal von Δ , so nennen wir $k[\Delta] = k[x_1, \dots, x_n]/I_\Delta$ den *Stanley-Reisner Ring* von Δ .

Es ist dann leicht zu sehen, dass der Stanley-Reisner Ring $k[\Delta]$ als k -Vektorraum von den Restklassen der Monome x^α für $\alpha \in \mathbb{N}^n$ und $\text{supp}(\alpha) = \{i \mid \alpha_i \neq 0\} \in \Delta$ minimal erzeugt wird. Wir erhalten damit folgende Zerlegung:

$$k[\Delta] = \bigoplus_{i \geq 0} \text{Span}_k \{x^\alpha : \text{supp}(\alpha) \in \Delta, \sum_{j=1}^n \alpha_j = i\}$$

Im folgenden schreiben wir kurz $k[\Delta]_i$ für $\text{Span}_k \{x^\alpha : \text{supp}(\alpha) \in \Delta, \sum_{j=1}^n \alpha_j = i\}$, d.h. für den k -Vektorraum, der von den Monomen x^α in $k[\Delta]$ vom Grad i (d.h. $\sum_{j=1}^n \alpha_j = i$) erzeugt wird.

Definition 3.1.5. Sei Δ ein simplizialer Komplex auf der Eckenmenge $[n]$. Dann heißt

$$\text{Hilb}(k[\Delta], t) = \sum_{i \geq 0} \dim_k k[\Delta]_i t^i$$

die *Hilbert-Reihe* von $k[\Delta]$.

Bemerkung 3.1.6. Man kann zeigen (siehe Übungsaufgabe), dass

$$\text{Hilb}(k[\Delta], t) = \sum_{i=-1}^{\dim \Delta} f_i^\Delta \frac{t^{i+1}}{(1-t)^{i+1}}$$

gilt.

Eine Charakterisierung der möglichen f -Vektoren simplizialer Komplexe liefert uns damit auch eine Charakterisierung der Hilbert-Reihen von Stanley-Reisner Ringen, die auftreten können. Ist Δ ein $(d-1)$ -dimensionaler simplizialer Komplex auf der Eckenmenge $[n]$, so

können wir die Hilbert-Reihe noch etwas umschreiben. Es gilt

$$\begin{aligned}
 \text{Hilb}(k[\Delta], t) &= \sum_{i=-1}^{d-1} f_i^\Delta \frac{t^{i+1}}{(1-t)^{i+1}} \\
 &= \sum_{i=-1}^{d-1} f_i^\Delta \frac{t^{i+1}}{(1-t)^{i+1}} \frac{(1-t)^{d-i-1}}{(1-t)^{d-i-1}} \\
 &= \sum_{i=-1}^{d-1} f_i^\Delta \frac{t^{i+1}(1-t)^{d-i-1}}{(1-t)^d} \\
 &= \frac{\sum_{i=-1}^{d-1} f_i^\Delta t^{i+1} \sum_{m=0}^{d-i-1} (-1)^m \binom{d-i-1}{m} t^m}{(1-t)^d} \\
 &= \frac{\sum_{i=-1}^{d-1} \sum_{m=0}^{d-i-1} (-1)^m f_i^\Delta \binom{d-i-1}{m} t^{m+i+1}}{(1-t)^d} \\
 &= \frac{\sum_{i=-1}^{d-1} \sum_{m=i+1}^d (-1)^{m-i-1} f_i^\Delta \binom{d-i-1}{m-i-1} t^m}{(1-t)^d} \\
 &= \frac{\sum_{m=0}^d (\sum_{i=-1}^{m-1} (-1)^{m-i-1} f_i^\Delta \binom{d-i-1}{m-i-1}) t^m}{(1-t)^d} \\
 &= \frac{\sum_{m=0}^d (\sum_{i=0}^m (-1)^{m-i} f_{i-1}^\Delta \binom{d-i}{m-i}) t^m}{(1-t)^d}.
 \end{aligned}$$

Wir erinnern uns an die Definition des h -Vektors, der gegeben war durch

$$h_i^\Delta = \sum_{j=0}^i (-1)^{j-i} f_{i-1}^\Delta \binom{d-j}{i-j}.$$

Damit folgt dann direkt, dass die Hilbert-Reihe von $k[\Delta]$ gegeben ist durch

$$\text{Hilb}(k[\Delta], t) = \frac{h_0^\Delta + h_1^\Delta t + \cdots + h_d^\Delta t^d}{(1-t)^d}.$$

Im folgenden Abschnitt werden wir einige technische Hilfsmittel zusammenstellen, die wir für den Beweis des Satzes von Kruskal-Katona benötigen werden.

3.2 Der Satz von Kruskal-Katona

Ziel dieses Abschnitts ist der Beweis des Satzes von Kruskal-Katona, der eine Klassifikation der f -Vektoren simplizialer Komplexe liefert. Um dieses Ziel zu erreichen, benötigen wir zuerst einige Vorbereitungen.

Definition 3.2.1. (i) Für $0 \leq i \leq n$ bezeichne $\binom{[n]}{i}$ die Menge der i -elementigen Teilmengen von $[n]$, d.h.

$$\binom{[n]}{i} = \{A \subseteq [n] : |A| = i\}.$$

(ii) Für zwei Mengen $A, B \subseteq \mathbb{N}$ heißt die Menge

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

die *symmetrische Differenz* von A und B .

(iii) Man definiert eine Ordnungsrelation auf den Teilmengen von $\mathbb{N}$ derart, dass für Mengen $A, B \subseteq \mathbb{N}$ gilt

$$A \leq_S B \Leftrightarrow A = B \text{ oder } \max(A \Delta B) \in B.$$

Die Ordnungsrelation $\leq_S$ wird als *squashed Ordnung* bezeichnet.

Üblicherweise werden wir die soeben definierte squashed Ordnung vor allem dazu verwenden Mengen gleicher Kardinalität zu vergleichen.

Beispiel 3.2.2. Wir betrachten die Menge der 3-elementigen Teilmengen von $[5]$. In der squashed Ordnung sind diese folgendermaßen geordnet:

$$\begin{aligned} \{1, 2, 3\} <_S \{1, 2, 4\} <_S \{1, 3, 4\} <_S \{2, 3, 4\} <_S \{1, 2, 5\} \\ <_S \{1, 3, 5\} <_S \{2, 3, 5\} <_S \{1, 4, 5\} <_S \{2, 4, 5\} <_S \{3, 4, 5\}. \end{aligned}$$

Die nächste Bemerkung macht deutlich wie sich Mengen in der squashed Ordnung zu einander verhalten.

Bemerkung 3.2.3. Sei $A \in \binom{[n]}{i}$ und sei $B \in \binom{[n+1]}{i}$ mit $n+1 \in B$. Dann gilt $A <_S B$ in der squashed Ordnung. In der Tat ist $n+1 \in A \Delta B$ und insbesondere das größte Element dieser Menge. Da aber auch $n+1 \in B$ gilt, folgt die Behauptung.

Wir werden uns nun mit der folgenden Frage beschäftigen:

Frage 3.2.4. Sei $1 \leq j \leq \binom{n}{i}$. Welche Menge aus $\binom{[n]}{i}$ ist das j -te Element in der squashed Ordnung?

Um obige Frage zu beantworten, benötigen wir zunächst die Definition der sog. l -Binomialdarstellung einer Zahl $m \in \mathbb{N}$.

Definition 3.2.5. Seien $m, l \geq 1$ natürliche Zahlen. Eine l -Binomialdarstellung von m ist eine Folge $a_l > \dots > a_j \geq j \geq 1$, so dass

$$m = \binom{a_l}{l} + \dots + \binom{a_j}{j}.$$

Es ist a priori weder klar, ob jede Zahl $m \geq l$ eine l -Binomialdarstellung besitzt, noch ob diese eindeutig ist oder nicht. Wir werden jedoch sehen, dass dies in der Tat der Fall ist.

Beispiel 3.2.6.

(i) Sei $m = 28$ und $l = 4$. Wir bestimmen eine 4-Binomialdarstellung von 28. Es gilt

$$m = \binom{6}{4} + \binom{5}{3} + \binom{3}{2} = 28,$$

d.h. $a_4 = 6, a_3 = 5, a_2 = 3$ und $j = 2$.

(ii) Sei $m = 24$ und $l = 4$. Als 4-Binomialdarstellung von 29 erhalten wir

$$m = \binom{6}{4} + \binom{5}{3} + \binom{3}{2} + \binom{1}{1} = 29.$$

Also. $a_4 = 6, a_3 = 5, a_2 = 3, a_1 = 1$ und $j = 1$.

Satz 3.2.7 (Existenz und Eindeutigkeit von l -Binomialdarstellungen). *Seien $m, l \geq 1$ natürliche Zahlen. Dann gibt es eine eindeutige l -Binomialdarstellung von m , d.h. es existieren eindeutig bestimmte natürliche Zahlen $a_l > \dots > a_j \geq j \geq 1$, so dass*

$$m = \binom{a_l}{l} + \binom{a_{l-1}}{l-1} + \dots + \binom{a_j}{j}.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst die Existenz einer l -Binomialdarstellung. Im ersten Schritt wählen wir a_l maximal, so dass $m \geq \binom{a_l}{l}$ gilt. Im zweiten Schritt wird $a_{l-1} = \max\{s : \binom{s}{l-1} \leq m - \binom{a_l}{l}\}$ gewählt. Entsprechend setzt man im $(r+1)$ -ten Schritt, wenn $a_l, a_{l-1}, \dots, a_{l-r+1}$ bereits gewählt wurden, $a_{l-r} = \max\{s : \binom{s}{l-r} \leq m - \binom{a_l}{l} - \binom{a_{l-1}}{l-1} - \dots - \binom{a_{l-r+1}}{l-r+1}\}$. Dieses Verfahren wird so lange fortgesetzt bis es abbricht. Dies ist spätestens der Fall, wenn a_1 bestimmt werden soll, da man $a_1 = m - \binom{a_l}{l} - \binom{a_{l-1}}{l-1} - \dots - \binom{a_2}{2}$ setzen kann und dann

$$m = \binom{a_l}{l} + \binom{a_{l-1}}{l-1} + \dots + \binom{a_1}{1}$$

gilt. Es bleibt zu zeigen, dass die angegebene Konstruktion die Voraussetzungen $a_l > a_{l-1} >$

$\dots > a_j \geq j$ erfüllt. Angenommen es existiert ein r mit $a_r \leq a_{r-1}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} m - \binom{a_l}{l} - \dots - \binom{a_{r+1}}{r+1} \\ &= \binom{a_r}{r} + \binom{a_{r-1}}{r-1} + \dots + \binom{a_j}{j} \\ &\geq \binom{a_r}{r} + \binom{a_{r-1}}{r-1} \\ &\geq \binom{a_r}{r} + \binom{a_r}{r-1} \\ &= \binom{a_r+1}{r}. \end{aligned}$$

Dies liefert direkt einen Widerspruch dazu, dass a_r maximal gewählt war.

Es bleibt noch die Eindeutigkeit zu zeigen. Seien $a_l > a_{l-1} > \dots > a_j \geq j \geq 1$ und $b_l > b_{l-1} > \dots > b_s \geq s \geq 1$ mit

$$\binom{a_l}{l} + \dots + \binom{a_j}{j} = m = \binom{b_l}{l} + \dots + \binom{b_s}{s}.$$

Wir zeigen die Eindeutigkeit mittels Induktion über l . Für $l = 1$ folgt direkt $a_1 = m = b_1$ und damit die Eindeutigkeit. Sei also $l \geq 2$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

Fall 1: Sei $a_l = b_l$. In diesem Fall folgt, dass $\binom{a_{l-1}}{l-1} + \dots + \binom{a_j}{j}$ und $\binom{b_{l-1}}{l-1} + \dots + \binom{b_s}{s}$ $(l-1)$ -Binomialdarstellungen von $m - \binom{a_l}{l}$ sind. Per Induktion folgt dann $j = s$ und $a_{l-1} = b_{l-1}, \dots, a_j = b_j$ und damit die Eindeutigkeit.

Fall 2: Sei $a_l \neq b_l$. Es gilt

$$\begin{aligned} m &= \binom{a_l}{l} + \dots + \binom{a_j}{j} \\ &\leq \binom{a_l}{l} + \binom{a_l-1}{l-1} + \dots + \binom{a_l-(l-j)}{j} \\ &\leq \binom{a_l}{l} + \binom{a_l-1}{l-1} + \dots + \binom{a_l-l+1}{1}, \end{aligned}$$

wobei die erste Ungleichung gilt wegen $a_i \leq a_l - (l-i)$ für $j \leq i \leq l-1$. Für die zweite Ungleichung wurden lediglich zusätzliche nicht-negative Terme addiert. Aus der Binomialidentität $\binom{n}{k} + \binom{n-1}{k-1} + \dots + \binom{n-k}{0} = \binom{n+1}{k}$, angewandt auf den letzten Ausdruck in obiger Ungleichungskette folgt

$$m \leq \binom{a_l+1}{l} - 1. \quad (3.1)$$

Da $a_l \neq b_l$ nach Voraussetzung können wir annehmen, dass $a_l < b_l$ gilt, d.h. $a_l + 1 \leq b_l$. Nach Voraussetzung und wegen Gleichung (3.1) gilt

$$\binom{b_l}{l} + \dots + \binom{b_s}{s} = m \leq \binom{a_l + 1}{l} - 1 \leq \binom{b_l}{l} - 1,$$

wobei die letzte Ungleichung aus $a_l + 1 \leq b_l$ folgt. Damit ergibt sich

$$\binom{b_{l-1}}{l-1} + \dots + \binom{b_s}{s} \leq -1.$$

Dies ist offensichtlich ein Widerspruch und damit muss $b_l = a_l$ gelten. Die Behauptung folgt schließlich aus Fall 1. $\square$

Satz 3.2.8. Seien $m, i \geq 1$ und sei

$$m = \binom{a_i}{i} + \binom{a_{i-1}}{i-1} + \dots + \binom{a_j}{j}$$

die i -Binomialdarstellung von m . Dann ist

$$\{a_i + 1, a_{i-1} + 1, \dots, a_{j+1} + 1, a_j, a_j - 1, \dots, a_j - j + 1\}$$

das m -te Element in der squashed Ordnung auf den i -elementigen Teilmengen von $\mathbb{N}$.

Beweis. Sei

$$m = \binom{a_i}{i} + \binom{a_{i-1}}{i-1} + \dots + \binom{a_j}{j}.$$

die i -Binomialdarstellung von m . Wir beweisen die Aussage des Satzes per Induktion über i . Für $i = 1$ ist $m = \binom{m}{1}$ und $\{m\}$ ist offensichtlich das m -te Element in der squashed Ordnung auf den 1-elementigen Teilmengen von $\mathbb{N}$. Sei nun $i \geq 2$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall 1: $m = \binom{a_i}{i}$. In diesem Fall ist das m -te Element in der squashed Ordnung auf den i -elementigen Teilmengen von $\mathbb{N}$ das größte Element in der squashed Ordnung auf $\binom{[a_i]}{i}$. Dieses ist offensichtlich $\{a_i, a_i - 1, \dots, a_i - (i - 1)\}$. Dies zeigt die Behauptung in diesem Fall.

Fall 2: Sei nun $m > \binom{a_i}{i}$. Nach Konstruktion der i -Binomialdarstellung folgt dann direkt

$$\binom{a_i + 1}{i} > m > \binom{a_i}{i}.$$

Die ersten $\binom{a_i}{i}$ Mengen in der squashed Ordnung auf den i -elementigen Teilmengen von $\mathbb{N}$ sind die Mengen $\binom{[a_i]}{i}$. Die Mengen an den folgenden Positionen von $\binom{a_i}{i} + 1$ bis $\binom{a_i + 1}{i}$ sind die Mengen in $\binom{[a_i + 1]}{i} \setminus \binom{[a_i]}{i}$. Da $\binom{a_i + 1}{i} > m > \binom{a_i}{i}$ ist die m -te Menge in der squashed Ordnung gerade die $(m - \binom{a_i}{i})$ -te Menge dieser Mengen. Insbesondere enthält sie das Element $a_i + 1$. Genauer ergibt sie sich als Vereinigung der $m - \binom{a_i}{i}$ -ten Menge in der squashed Ordnung auf

$\binom{[a_i]}{i-1}$ mit der Menge $\{a_i + 1\}$. Da nun $\binom{a_{i-1}}{i-1} + \dots + \binom{a_j}{j}$ die $(i-1)$ -Binomialdarstellung von $m - \binom{a_i}{i}$ ist, folgt per Induktion, dass die Menge

$$\{a_{i-1} + 1, \dots, a_{j+1} + 1, a_j, a_j - 1, \dots, a_j - j + 1\}$$

das $(m - \binom{a_i}{i})$ -te Element in der squashed Ordnung auf den $(i-1)$ -elementigen Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist. Daraus folgt, dass

$$\{a_i + 1, a_{i-1} + 1, \dots, a_{j+1} + 1, a_j, a_j - 1, \dots, a_j - j + 1\}$$

das m -te Element in der squashed Ordnung auf den i -elementigen Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist. $\square$

Wir betrachten nun zunächst ein Beispiel zu obigem Satz.

Beispiel 3.2.9. (i) Wir hatten bereits gesehen, dass

$$\binom{6}{4} + \binom{5}{3} + \binom{3}{2} = 28$$

die 4-Binomialdarstellung von 28 ist (vergleiche Beispiel 3.2.6 (i)). Aus Satz 3.2.8 folgt dann, dass $\{6 + 1, 5 + 1, 3, 2\} = \{7, 6, 3, 2\}$ das 28-te Element in der squashed Ordnung auf den 4-elementigen Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist.

(ii) In Beispiel 3.2.6 (ii) hatten wir gezeigt, dass

$$\binom{6}{4} + \binom{5}{3} + \binom{3}{2} + \binom{1}{1} = 29$$

die 4-Binomialdarstellung von 29 ist. Aus Satz 3.2.8 folgt direkt, dass $\{6 + 1, 5 + 1, 3 + 1, 1\} = \{7, 6, 4, 1\}$ das 29-te Element in der squashed Ordnung auf den 4-elementigen Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist.

Definition 3.2.10. Sei $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{i}$ eine Menge i -elementiger Teilmengen von $[n]$. Dann heißt

$$\Delta\mathcal{A} = \left\{ B \in \binom{[n]}{i-1} : B \subset C \text{ für ein } C \in \mathcal{A} \right\}$$

unterer Schatten von $\mathcal{A}$.

Beispiel 3.2.11. Sei $i = 4$ und $n = 6$. Betrachte

$$\mathcal{A} = \{\{1, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 6\}, \{1, 3, 4, 6\}\}.$$

Dann ist

$$\Delta\mathcal{A} = \{\{1, 3, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{3, 4, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 6\}, \{2, 4, 6\}, \{3, 4, 6\}, \{1, 3, 6\}, \{1, 4, 6\}\}.$$

Im allgemeinen ist es schwierig die Kardinalität des unteren Schattens exakt zu bestimmen.

Satz 3.2.12. Sei $m, i \geq 1$ und sei

$$m = \binom{a_i}{i} + \binom{a_{i-1}}{i-1} + \dots + \binom{a_j}{j}$$

die i -Binomialdarstellung von m . Sei weiter $\mathcal{A}$ die Menge der ersten m i -elementigen Teilmengen in der squashed Ordnung auf $\mathbb{N}$. Dann gilt

$$\#\Delta\mathcal{A} = \binom{a_i}{i-1} + \binom{a_{i-1}}{i-2} + \dots + \binom{a_j}{j-1}.$$

Beweis. Für den Beweis des obigen Satzes überlegen wir uns, von welcher Form die ersten m Mengen in der squashed Ordnung sind und welche bzw. wie viele $(i-1)$ -elementigen Teilmengen sie zu $\Delta\mathcal{A}$ beitragen.

Die ersten $\binom{a_i}{i}$ i -elementigen Mengen in der squashed Ordnung sind alle i -elementigen Teilmengen von $[a_i]$. Da offensichtlich $\Delta\binom{[a_i]}{i} = \binom{[a_i]}{i-1}$ tragen diese $\binom{a_i}{i}$ Mengen zu $\Delta\mathcal{A}$ bei. Nach Satz 3.2.8 enthalten alle Elemente von $\mathcal{A} \setminus \binom{[a_i]}{i}$ die Zahl $a_i + 1$. Nach Satz 3.2.8 ergeben sich die Mengen an Position u für $\binom{a_i}{i} < u \leq \binom{a_i}{i} + \binom{a_{i-1}}{i-1}$ als Vereinigung einer $(i-1)$ -elementigen Teilmenge von $[a_{i-1}]$ mit dem Element $a_i + 1$. Diese Mengen tragen zusätzlich die Vereinigung aller $(i-2)$ -elementigen Teilmengen von $[a_{i-1}]$ mit $\{a_i + 1\}$ zu $\Delta\mathcal{A}$ bei. Dies sind gerade $\binom{a_{i-1}}{i-2}$ viele Mengen. Die gleiche Argumentation wie zuvor zeigt, dass für $t \geq 2$ die Mengen an Positionen größer als $\binom{a_i}{i} + \binom{a_{i-1}}{i-1} + \dots + \binom{a_{t+1}}{t+1}$ und kleiner gleich $\binom{a_i}{i} + \binom{a_{i-1}}{i-1} + \dots + \binom{a_t}{t}$ die Elemente $a_i + 1, a_{i-1} + 1, \dots, a_{t+1} + 1$ enthalten und zusätzlich Vereinigungen von Mengen aus $\binom{[a_t]}{t-1}$ mit $\{a_i + 1, a_{i-1} + 1, \dots, a_{t+1} + 1\}$ zu $\Delta\mathcal{A}$ beitragen. Dies zeigt

$$\#\Delta\mathcal{A} = \binom{a_i}{i-1} + \binom{a_{i-1}}{i-2} + \dots + \binom{a_j}{j-1}.$$

□

Beispiel 3.2.13. Betrachte $i = 3$ und $m = 7$. Die 3-Binomialdarstellung von 7 ist

$$7 = \binom{4}{3} + \binom{3}{2}.$$

Damit ist nach Satz 3.2.8 das 7-te Element in der squashed Ordnung auf den 3-elementigen Teilmengen $\{4 + 1, 3, 2\} = \{2, 3, 5\}$. $\mathcal{A}$ enthalte die ersten 7 Elemente in der squashed Ordnung auf den 3-elementigen Teilmengen, d.h.

$$\mathcal{A} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 5\}, \{2, 3, 5\}\}.$$

Dann ist

$$\Delta\mathcal{A} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 5\}, \{3, 5\}\}.$$

Es ist $\#\Delta\mathcal{A} = 9 = \binom{4}{3-1} + \binom{3}{2-1} = 6 + 3$.

Für allgemeine Mengensysteme $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{i}$ lässt sich zumindest eine untere Schranke für die Kardinalität des unteren Schattens $\Delta\mathcal{A}$ angeben. Dies liefert die folgende Version des Satzes von Kruskal-Katona.

Theorem 3.2.14 (Kruskal-Katona, 1. Version). *Sei $i \geq 1$ und sei $\emptyset \neq \mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{i}$. Sei $m = \#\mathcal{A}$ und sei*

$$m = \binom{a_i}{i} + \binom{a_{i-1}}{i-1} + \dots + \binom{a_j}{j}$$

die i -Binomialdarstellung von m . Dann gilt

$$\#\Delta\mathcal{A} \geq \binom{a_i}{i-1} + \binom{a_{i-1}}{i-2} + \dots + \binom{a_j}{j-1}.$$

Beispiel 3.2.15. Sei $i = 3$ und $m = 2$. Dann enthält $\mathcal{A} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}\}$ die ersten beiden Mengen in der squashed Ordnung auf 3-elementigen Teilmengen von $\mathbb{N}$. Es ist $\Delta\mathcal{A} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}\}$ und gemäß Satz 3.2.8 ist $\#\Delta\mathcal{A} = 5 = \binom{3}{2} + \binom{2}{1}$. Sei andererseits $\mathcal{B} = \{\{1, 2, 3\}, \{3, 4, 5\}\}$. Dann ist $\Delta\mathcal{B} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\}$ und $\#\mathcal{B} = 6 > 5$.

Der Beweis des Satzes von Kruskal-Katona benötigt noch einige Vorbereitungen (siehe die folgenden zwei Lemmata).

Lemma 3.2.16. *Sei $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{i}$ und sei $1 < j \leq n$. Wir definieren für $A \in \mathcal{A}$*

$$S_j^{\mathcal{A}}(A) = \begin{cases} (A \setminus \{j\}) \cup \{1\} & \text{für } j \in A, 1 \notin A, (A \setminus \{j\}) \cup \{1\} \notin \mathcal{A} \\ A & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$S_j(\mathcal{A}) = \{S_j^{\mathcal{A}}(A) : A \in \mathcal{A}\}.$$

Dann gilt $\Delta S_j(\mathcal{A}) \subseteq S_j(\Delta\mathcal{A})$. Insbesondere $\#\Delta S_j(\mathcal{A}) \leq \#\Delta\mathcal{A}$.

Beweis. Um die Inklusion $\Delta S_j(\mathcal{A}) \subseteq S_j(\Delta\mathcal{A})$ zu zeigen, müssen wir zeigen, dass für $A \in \mathcal{A}$ gilt $\Delta S_j^{\mathcal{A}}(A) \subseteq S_j(\Delta\mathcal{A})$. Sei also $A \in \mathcal{A}$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall 1: $S_j^{\mathcal{A}}(A) = A$

Sei $B \in \Delta S_j^{\mathcal{A}}(A)$. Dann ist nach Voraussetzung $B \in \Delta A$ und es existiert ein $1 \leq i \leq n$ mit $A = B \cup \{i\}$. Um zu zeigen, dass $B \in S_j(\Delta\mathcal{A})$ gilt, zeigen wir, dass $S_j^{\Delta\mathcal{A}}(B) = B$ gilt. Wir beweisen dies mittels Fallunterscheidung.

Fall 1 (a): $i = j$. Dann ist $j \notin B$ und damit per Definition $S_j^{\Delta\mathcal{A}}(B) = B$.

Fall 1 (b): $i = 1$ und $j \in B$. In diesem Fall ist $(B \setminus \{j\}) \cup \{1\} = A \setminus \{j\} \in \Delta\mathcal{A}$ und per Definition gilt dann $S_j^{\Delta\mathcal{A}}(B) = B$.

Fall 1 (c): $i = 1$ und $j \notin B$. In diesem Fall gilt per Definition des Shift-Operators $S_j^{\Delta\mathcal{A}}(B) = B$.

Fall 1 (d): $i \neq 1$ und $i \neq j$. $S_j^{\Delta\mathcal{A}}(B) \neq B$ kann nur gelten, wenn $j \in B$ und $1 \notin B$. Da $A = B \cup \{i\}$

gilt dann aber auch $j \in A$ und $1 \notin A$. Wegen $S_j^{\mathcal{A}}(A) = A$ muss dann aber gelten $A \setminus \{j\} \cup \{1\} \in \mathcal{A}$. Dann gilt jedoch auch $B \setminus \{j\} \cup \{1\} \in \Delta\mathcal{A}$, woraus folgt $S_j^{\Delta\mathcal{A}}(B) = B$.

Da $B \in \Delta\mathcal{A}$ und $S_j^{\Delta\mathcal{A}}(B) = B$ folgt schließlich $B \in S_j(\Delta\mathcal{A})$.

Fall 2: $S_j^{\mathcal{A}}(A) \neq A$

In diesem Fall gilt $j \in A$, $1 \notin A$, $(A \setminus \{j\}) \cup \{1\} \notin \mathcal{A}$ und $S_j^{\mathcal{A}}(A) = (A \setminus \{j\}) \cup \{1\}$. Sei $B \in \Delta S_j(A)$. Erneut unterscheiden wir nun zwei Fälle.

Fall 2 (a): $1 \notin B$. In diesem Fall ist $B = A \setminus \{j\}$ und es gilt $S_j^{\Delta\mathcal{A}}(B) = B$. Da auch $B \in \Delta\mathcal{A} \subseteq \Delta\mathcal{A}$ gilt, folgt $B \in S_j(\Delta\mathcal{A})$.

Fall 2 (b): $1 \in B$. Setze $B^* = (B \setminus \{1\}) \cup \{j\}$. Es gilt $B^* \subset A$ und damit $B^* \in \Delta\mathcal{A}$. Ist $B \notin \Delta\mathcal{A}$, so gilt per Definition des Shift-Operators $S_j^{\Delta\mathcal{A}*}(B^*) = B$ und wegen $B^* \in \Delta\mathcal{A}$ folgt $B \in S_j(\Delta\mathcal{A})$.

Ist $B \in \Delta\mathcal{A}$, so gilt, wegen $j \notin B$, $S_j^{\Delta\mathcal{A}}(B) = B$ und somit $B \in S_j(\Delta\mathcal{A})$.

Es gilt also $\Delta S_j(\mathcal{A}) \subseteq S_j(\Delta\mathcal{A})$ und daraus folgt direkt $\#\Delta S_j(\mathcal{A}) \leq \#S_j(\Delta\mathcal{A})$. Da nach Definition des Shift-Operators aber auch $\#S_j(\mathcal{A}) = \#\mathcal{A}$ gilt, folgt

$$\#\Delta S_j(\mathcal{A}) \leq \#S_j(\Delta\mathcal{A}) = \#\Delta\mathcal{A}$$

und damit die Aussage des letzten Teils des Lemmas. $\square$

Beispiel 3.2.17. Sei $i = 3$, $n = 5$ und sei $\mathcal{A} = \{\{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}\}$. Beispielsweise gilt $S_4^{\mathcal{A}}(\{1, 2, 4\}) = \{1, 2, 4\}$, $S_3^{\mathcal{A}}(\{2, 3, 5\}) = \{1, 2, 5\}$, $S_5^{\mathcal{A}}(\{2, 3, 4\}) = \{2, 3, 4\}$ und $S_3^{\mathcal{A}}(\{2, 3, 4\}) = \{2, 3, 4\}$, da $\{1, 2, 4\} \in \mathcal{A}$. Ferner erhalten wird

$$\begin{aligned} S_5(\mathcal{A}) &= \{S_5(\{1, 2, 4\}), S_5(\{2, 3, 4\}), S_5(\{2, 3, 5\})\} \\ &= \{\{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3\}\} \end{aligned}$$

und

$$\Delta S_5(\mathcal{A}) = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 3\}\}$$

Weiter ist

$$\Delta\mathcal{A} = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 5\}\}$$

und

$$S_5(\Delta\mathcal{A}) = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{2, 5\}, \{1, 3\}\}.$$

Insbesondere gilt also $\Delta S_5(\mathcal{A}) \subsetneq S_5(\Delta\mathcal{A})$.

Lemma 3.2.18. Sei $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{i}$ mit $S_j(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ für $2 \leq j \leq n$. Sei

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 &= \{A \in \mathcal{A} : 1 \notin A\} \text{ und} \\ \mathcal{A}_1 &= \{A \setminus \{1\} : A \in \mathcal{A}, 1 \in A\}. \end{aligned}$$

Dann gilt $\Delta\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}_1$ und insbesondere $\#\mathcal{A}_1 \geq \#\Delta\mathcal{A}_0$.

Beweis. Sei $A \in \Delta\mathcal{A}_0$. Dann existiert ein $2 \leq i \leq n$ mit $A \cup \{i\} \in \mathcal{A}_0$. Es gilt $S_i^{\mathcal{A}}(A \cup \{i\}) = A \cup \{1\} \in S_i(\mathcal{A})$ und wegen $S_i(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ nach Voraussetzung folgt $A \cup \{1\} \in \mathcal{A}$. Insbesondere folgt $A \in \mathcal{A}_1$. Es gilt also $\Delta\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}_1$ und damit auch $\#\mathcal{A}_1 \geq \#\Delta\mathcal{A}_0$. $\square$

Beispiel 3.2.19. Betrachte 3-elementige Teilmengen von $[5]$. Sei

$$\mathcal{A} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 5\}\}.$$

Es gilt $S_j(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ für $2 \leq j \leq 5$. Weiter ist $\mathcal{A}_0 = \{\{2, 3, 4\}\}$ und entsprechend $\Delta\mathcal{A}_0 = \{\{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$. Zusätzlich gilt $\mathcal{A}_1 = \{\{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{2, 5\}\}$ und es gilt $\#\mathcal{A}_1 = 4 > 3 = \#\Delta\mathcal{A}_0$.

Wir können schließlich zu dem Beweis von Theorem 3.2.14 kommen.

Beweis von Theorem 3.2.14: Sei $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{i}$ gegeben und sei

$$\#\mathcal{A} = \binom{a_i}{i} + \dots + \binom{a_j}{j}$$

die i -Binomialdarstellung von $\#\mathcal{A}$. Wir müssen zeigen, dass

$$\#\Delta\mathcal{A} \geq \binom{a_i}{i-1} + \dots + \binom{a_j}{j-1}$$

gilt. Für $2 \leq j \leq n$ gilt $\#S_j(\mathcal{A}) = \#\mathcal{A}$ und, wegen Lemma 3.2.16, gilt $\#\Delta\mathcal{A} \geq \#\Delta S_j(\mathcal{A})$. Durch sukzessives Anwenden der Shift-Operatoren $S_j^{\mathcal{A}}$ erhalten wir eine Menge $\mathcal{A}^*$ mit den Eigenschaften, dass $\#\mathcal{A}^* = \#\mathcal{A}$, $S_j(\mathcal{A}^*) = \mathcal{A}^*$ für $2 \leq j \leq n$ und nach Lemma 3.2.16 mit $\#\Delta\mathcal{A}^* \leq \#\Delta\mathcal{A}$. Da nach Konstruktion, $\#\mathcal{A} = \#\mathcal{A}^*$, reicht es damit die Behauptung für $\mathcal{A}^*$ zu zeigen. Wir können daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $S_j(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ für $2 \leq j \leq n$ gilt.

Der Beweis ist mittels Induktion über i . Induktionsanfang: Sei $i = 1$. In diesem Fall ist $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{1}$ und es gilt $\#\mathcal{A} = m = \binom{n}{1}$. Offensichtlich ist $\Delta\mathcal{A} = \{\emptyset\}$, also $\#\Delta\mathcal{A} = 1 \geq \binom{m}{0} = 1$ und die Behauptung gilt in diesem Fall.

Induktionsschritt: Sei $i \geq 2$. Wir zeigen die Behauptung im Induktionsschritt per Induktion über n .

Sei im Induktionsanfang $n = i$. Dann ist $\mathcal{A} \subseteq \binom{[i]}{i} = \{\{1, \dots, i\}\}$. Da $\mathcal{A} \neq \emptyset$ nach Voraussetzung, muss gelten $\mathcal{A} = \{\{1, \dots, i\}\}$ und $\#\mathcal{A} = m = 1 = \binom{i}{i}$. Weiter ist $\Delta\mathcal{A} = \binom{[i]}{i-1}$, woraus folgt $\#\Delta\mathcal{A} = \binom{i}{i-1} = i$. Dies zeigt die Behauptung für $n = i$.

Im Induktionsschritt sei $n \geq i + 1$. Wir können schreiben

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{A} : 1 \notin A\} \cup \{A \in \mathcal{A} : 1 \in A\}$$

und diese Vereinigung ist disjunkt. Da $\#\{A \in \mathcal{A} : 1 \in A\} = \#\{A \setminus \{1\} : A \in \mathcal{A}, 1 \in A\} = \#\mathcal{A}_1$ folgt $\#\mathcal{A} = \#\mathcal{A}_0 + \#\mathcal{A}_1$, d.h.

$$\#\mathcal{A}_0 = \#\mathcal{A} - \#\mathcal{A}_1. \quad (3.2)$$

Behauptung: $\#\mathcal{A}_1 \geq \binom{a_i-1}{i-1} + \dots + \binom{a_j-1}{j-1}$.

Angenommen, es würde gelten

$$\#\mathcal{A}_1 < \binom{a_i-1}{i-1} + \dots + \binom{a_j-1}{j-1}.$$

Dann folgt aus (3.2), dass

$$\begin{aligned} \#\mathcal{A}_0 &= \#\mathcal{A} - \#\mathcal{A}_1 \\ &> \left(\binom{a_i}{i} + \dots + \binom{a_j}{j} \right) - \left(\binom{a_i-1}{i-1} + \dots + \binom{a_j-1}{j-1} \right) \\ &= \left(\binom{a_i}{i} - \binom{a_i-1}{i-1} \right) + \dots + \left(\binom{a_j}{j} - \binom{a_j-1}{j-1} \right) \\ &= \binom{a_i-1}{i} + \dots + \binom{a_j-1}{j}. \end{aligned}$$

Da $\mathcal{A}_0 \subseteq \binom{[n] \setminus \{1\}}{i}$ können wir die Induktionsvoraussetzung auf $\mathcal{A}_0$ anwenden und es ergibt sich

$$\#\Delta\mathcal{A}_0 \geq \binom{a_i-1}{i-1} + \dots + \binom{a_j-1}{j-1}.$$

Aus Lemma 3.2.18 folgt wegen $S_j(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ für $2 \leq j \leq n$ aber andererseits, dass

$$\begin{aligned} \#\mathcal{A}_1 &\geq \#\Delta\mathcal{A}_0 \\ &\geq \binom{a_i-1}{i-1} + \dots + \binom{a_j-1}{j-1} \\ &> \#\mathcal{A}_1, \end{aligned}$$

wobei letzte Ungleichung per Annahme gilt. Wir erhalten somit einen Widerspruch und es muss gelten

$$\#\mathcal{A}_1 \geq \binom{a_i-1}{i-1} + \dots + \binom{a_j-1}{j-1} \quad (3.3)$$

Gemäß der Induktionsvoraussetzung für i , angewandt auf $\mathcal{A}_1$, folgt nun

$$\#\Delta\mathcal{A}_1 \geq \binom{a_i-1}{i-2} + \dots + \binom{a_j-1}{j-2}. \quad (3.4)$$

Wir zeigen nun folgende Abschätzung für $\#\Delta\mathcal{A}$:

$$\#\Delta\mathcal{A} \geq \#\mathcal{A}_1 + \#\Delta\mathcal{A}_1.$$

Per Definition gilt $\mathcal{A}_1 \subseteq \Delta\mathcal{A}$. Sei nun $A \in \Delta\mathcal{A}_1$. Dann existiert ein $2 \leq l \leq n$ mit $A \cup \{l\} \in \mathcal{A}_1$. Nach Definition von $\mathcal{A}_1$ gilt sogar $A \cup \{1, l\} \in \mathcal{A}$ und damit ist $A \cup \{1\} \in \Delta\mathcal{A}$ und $A \cup \{1\} \notin$

$\mathcal{A}_1$. Offensichtlich ist die Abbildung, die $A \in \Delta\mathcal{A}_1$ das Element $A \cup \{1\}$ zuordnet, injektiv von $\Delta\mathcal{A}_1$ nach $\Delta\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_1$. Zusammenfassend erhalten wir also

$$\begin{aligned}\#\Delta\mathcal{A} &= \#\mathcal{A}_1 + \#(\Delta\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_1) \\ &\geq \#\mathcal{A}_1 + \#\Delta\mathcal{A}_1.\end{aligned}$$

Es folgt nun

$$\begin{aligned}\#\Delta\mathcal{A} &\geq \#\mathcal{A}_1 + \#\Delta\mathcal{A}_1 \\ &\geq \binom{a_i-1}{i-1} + \dots + \binom{a_j-1}{j-1} + \binom{a_i-1}{i-2} + \dots + \binom{a_j-1}{j-2} \\ &= \left(\binom{a_i-1}{i-1} + \binom{a_i-1}{i-2} \right) + \dots + \left(\binom{a_j-1}{j-1} + \binom{a_j-1}{j-2} \right) \\ &= \binom{a_i}{i-1} + \dots + \binom{a_j}{j-1},\end{aligned}$$

wobei für die erste Ungleichung (3.3) und (3.4) verwendet wurden. Dies zeigt schließlich die Behauptung. $\square$

Wir kommen nun direkt zu einer ersten Folgerung des Satzes von Kruskal-Katona.

Korollar 3.2.20. Seien $m, i \geq 1$, $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{i}$ mit $m = \#\mathcal{A}$ und

$$m = \binom{a_i}{i} + \dots + \binom{a_j}{j}$$

der i -Binomialdarstellung von m . Dann gilt

$$\#\{A \in \binom{[n]}{r} : \exists B \in \mathcal{A} \text{ mit } A \subseteq B\} \geq \binom{a_i}{r} + \dots + \binom{a_j}{j-(i-r)}$$

für $0 \leq r \leq i-1$. Dabei ist $\binom{n}{k} = 0$ für $k < 0$.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}\{A \in \binom{[n]}{r} : \exists B \in \mathcal{A} \text{ mit } A \subseteq B\} &= \Delta\Delta \dots \Delta\mathcal{A} \\ &= \Delta^{(i-r)}\mathcal{A}\end{aligned}$$

Wegen Theorem 3.2.14 gilt

$$\#\Delta\mathcal{A} \geq \binom{a_i}{i-1} + \dots + \binom{a_j}{j-1}$$

und iterative Anwendung liefert schließlich

$$\# \Delta^{(i-r)} \mathcal{A} \geq \binom{a_i}{r} + \dots + \binom{a_j}{j-(i-r)}.$$

□

Als weitere direkte Konsequenz des Satzes von Kruskal-Katona erhalten wir den Satz von Erdős-Ko-Rado.

Satz 3.2.21 (Erdős-Ko-Rado). *Sei $1 \leq i \leq \frac{1}{2}n$. Sei $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{i}$, so dass für $A, A' \in \mathcal{A}$ gilt: $A \cap A' \neq \emptyset$. Dann gilt $\#\mathcal{A} \leq \binom{n-1}{i-1}$.*

Beweis. Sei $\mathcal{A}' = \{[n] \setminus A : A \in \mathcal{A}\}$. Wir beweisen die Aussage des Satzes per Widerspruchannahme. Angenommen $\#\mathcal{A} > \binom{n-1}{i-1}$. Wegen $\#\mathcal{A}' = \#\mathcal{A}$, gilt dann auch $\#\mathcal{A}' > \binom{n-1}{i-1} = \binom{n-1}{n-i}$. Weiter ist $\mathcal{A}' \subseteq \binom{[n]}{n-i}$ per Konstruktion und in der $(n-i)$ -Binomialdarstellung hat $\#\mathcal{A}'$ die Form

$$\#\mathcal{A}' = \binom{a_{n-i}}{n-i} + \dots + \binom{a_j}{j},$$

wobei $a_{n-i} \geq n-1$ gilt. Aus Korollar 3.2.20 folgt dann

$$\#\{A \in \binom{[n]}{i} : \exists B \in \mathcal{A}' \text{ mit } A \subseteq B\} \geq \binom{a_{n-i}}{i} + \dots + \binom{a_j}{j-(n-2i)} \geq \binom{n-1}{i}.$$

Es gilt offenbar $\mathcal{A} \cup \{A \in \binom{[n]}{i} : \exists B \in \mathcal{A}' \text{ mit } A \subseteq B\} \subseteq \binom{[n]}{i}$. Wir zeigen nun, dass

$$\{A \in \binom{[n]}{i} : \exists B \in \mathcal{A}' \text{ mit } A \subseteq B\} \cap \mathcal{A} = \emptyset$$

gilt. Angenommen der obige Schnitt wäre nicht leer. Dann existiert ein

$$A \in \{A \in \binom{[n]}{i} : \exists B \in \mathcal{A}' \text{ mit } A \subseteq B\} \cap \mathcal{A}.$$

Es gilt also $A \in \mathcal{A}$ und es muss ein $C \in \mathcal{A}$ existieren mit $A \subseteq [n] \setminus C$. Insbesondere gilt dann also $A \cap C = \emptyset$. Dies liefert aber direkt einen Widerspruch zur Voraussetzung des Satzes, so dass

$$\{A \in \binom{[n]}{i} : \exists B \in \mathcal{A}' \text{ mit } A \subseteq B\} \cap \mathcal{A} = \emptyset$$

gelten muss. Daraus folgt nun

$$\begin{aligned} & \# \left(\{A \in \binom{[n]}{i} : \exists B \in \mathcal{A}' \text{ mit } A \subseteq B\} \cup \mathcal{A} \right) \\ &= \#\{A \in \binom{[n]}{i} : \exists B \in \mathcal{A}' \text{ mit } A \subseteq B\} + \#\mathcal{A} \\ &> \binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} = \binom{n}{i}. \end{aligned}$$

Dies ergibt einen Widerspruch, da

$$\{A \in \binom{[n]}{i} : \exists B \in \mathcal{A}' \text{ mit } A \subseteq B\} \cup \mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{i}$$

gilt und damit höchstens $\binom{n}{i}$ Elemente enthalten kann. $\square$

Definition 3.2.22. (i) Für $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{i}$ sei $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ die Menge der ersten $\#\mathcal{A}$ Mengen in der squashed Ordnung auf $\binom{[n]}{i}$.

(ii) Sei Δ ein simplizialer Komplex auf der Eckenmenge $[n]$. Wir setzen $\Delta_i = \{F \in \Delta : \#F = i\}$ für $0 \leq i \leq \dim \Delta + 1$. Dann definieren wir $\mathcal{C}(\Delta) = \bigcup_{i=0}^{\dim \Delta + 1} \mathcal{C}(\Delta_i)$ und nennen dies die *Kompression* von Δ .

Beispiel 3.2.23. Sei Δ der simplizialer Komplex auf $[5]$ mit den Facetten $\{1, 2, 3\}$ und $\{1, 4, 5\}$. Dann ist

$$\begin{aligned}\Delta_0 &= \{\emptyset\} \\ \Delta_1 &= \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\} \\ \Delta_2 &= \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{4, 5\}\} \\ \Delta_3 &= \{\{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5\}\}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(\Delta_0) &= \{\emptyset\} \\ \mathcal{C}(\Delta_1) &= \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\} \\ \mathcal{C}(\Delta_2) &= \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\} \\ \mathcal{C}(\Delta_3) &= \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}\}.\end{aligned}$$

In diesem Beispiel ist $\mathcal{C}(\Delta)$ ein simplizialer Komplex auf der Eckenmenge $[5]$ mit den Facetten $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{3, 4\}$ und $\{5\}$. Der f -Vektor ist $f^\Delta = f^{\mathcal{C}(\Delta)} = (1, 5, 6, 2)$.

Die Beobachtung in obigem Beispiel, dass die Kompression $\mathcal{C}(\Delta)$ von Δ ein simplizialer Komplex ist, gilt auch allgemein.

Korollar 3.2.24. Sei Δ ein simplizialer Komplex auf der Eckenmenge $[n]$. Dann ist $\mathcal{C}(\Delta)$ ein simplizialer Komplex und $f^\Delta = f^{\mathcal{C}(\Delta)}$.

Beweis. Die Gleichheit der f -Vektoren gilt per Konstruktion von $\mathcal{C}(\Delta)$. Es ist daher nur zu zeigen, dass $\mathcal{C}(\Delta)$ simplizialer Komplex ist. Dazu genügt es wiederum zu zeigen, dass

$\Delta\mathcal{C}(\Delta) \subseteq \mathcal{C}(\Delta)$ gilt, wobei wir setzen $\Delta\mathcal{C}(\Delta) = \bigcup_{i=0}^{\dim\Delta+1} \Delta\mathcal{C}(\Delta_i)$. Es gilt dann

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{C}(\Delta) &= \bigcup_{i=0}^{\dim\Delta+1} \Delta\mathcal{C}(\Delta_i) \\ &\subseteq \bigcup_{i=0}^{\dim\Delta+1} \mathcal{C}(\Delta(\Delta_i)) \\ &\subseteq \bigcup_{i=0}^{\dim\Delta+1} \mathcal{C}(\Delta_{i-1}), \end{aligned}$$

wobei die erste Enthaltensrelation aus Kruskal-Katona folgt und wir im letzten Schritt verwendet haben, dass Δ ein simplizialer Komplex ist. $\square$

Wir geben nun eine zweite Version des Satzes von Kruskal-Katona an, die uns die gewünschte Charakterisierung der f -Vektoren simplizialer Komplexe liefert.

Theorem 3.2.25 (Kruskal-Katona, 2. Version). *Sei $d \geq 0$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (i) $f = (f_{-1}, f_0, \dots, f_{d-1}) \in \mathbb{N}^{d+1}$ ist f -Vektor eines $(d-1)$ -dimensionalen simplizialen Komplexes Δ .
- (ii) $f_{-1} = 1$ und für $i \geq 0$ und $f_i = \binom{a_{i+1}}{i+1} + \binom{a_i}{i} + \dots + \binom{a_j}{j}$ in $(i+1)$ -Binomialdarstellung gilt

$$f_{i-1} \geq \binom{a_{i+1}}{i} + \binom{a_i}{i-1} + \dots + \binom{a_j}{j-1}.$$

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei Δ ein $(d-1)$ -dimensionaler simplizialer Komplex mit f -Vektor $f = (f_{-1}, f_0, \dots, f_{d-1})$. Dann gilt per Definition des f -Vektors $f_{-1} = 1$. Ferner gilt, da Δ ein simplizialer Komplex ist, $\Delta(\Delta_{i+1}) \subseteq \Delta_i$. Außerdem gilt $f_{i-1} = \#\Delta_i$. Aus dem Satz von Kruskal-Katona (Version 1) folgt nun

$$f_{i-1} \geq \#\Delta(\Delta_{i+1}) \geq \binom{a_{i+1}}{i} + \binom{a_i}{i-1} + \dots + \binom{a_j}{j-1}.$$

Dies zeigt (ii).

(ii) $\Leftarrow$ (i): Sei $\mathcal{A}_{i+1}$ die Menge der f_i ersten Elemente in der squashed Ordnung auf den $(i+1)$ -elementigen Teilmengen von $\mathbb{N}$. Aus Satz 3.2.12 folgt dann, dass $\Delta\mathcal{A}_{i+1}$ die ersten $\binom{a_{i+1}}{i} + \binom{a_i}{i-1} + \dots + \binom{a_j}{j-1}$ Elemente der squashed Ordnung auf den i -elementigen Teilmengen von $\mathbb{N}$ enthält. Da nach Voraussetzung

$$f_{i-1} \geq \binom{a_{i+1}}{i} + \binom{a_i}{i-1} + \dots + \binom{a_j}{j-1}$$

gilt, folgt $\Delta\mathcal{A}_{i+1} \subseteq \mathcal{A}_i$ und $\Delta = \bigcup_{i=0}^d \mathcal{A}_i$ ist $(d-1)$ -dimensionaler simplizialer Komplex mit dem angegebenen f -Vektor. $\square$

3.3 Multikomplexe und der Satz von Clements-Lindström

Definition 3.3.1. (i) Sei Δ eine Menge von Monomen in $S = k[x_1, \dots, x_n]$. Dann heißt Δ *Multikomplex*, falls für $m \in \Delta$ und n teilt m gilt $n \in \Delta$.

(ii) Sei $\Delta \subseteq \text{Mon}(S)$ ein Multikomplex. Wir setzen

$$f_i^\Delta = \#\{x^\alpha \in \Delta : \sum_{j=1}^n \alpha_j = i + 1\}.$$

Dann heißt $f^\Delta = (f_{-1}^\Delta, f_0^\Delta, \dots, f_{d-1}^\Delta)$ der f -Vektor von Δ . Die *Dimension* von Δ ist $\dim \Delta = \max\{i : f_i \neq 0\}$.

Beispiel 3.3.2. $\Delta = \{x_1^3, x_1^2, x_1, x_1 x_2, x_2, 1\}$ ist ein Multikomplex mit f -Vektor $f^\Delta = (1, 2, 2, 1)$.
Bemerke, dass $(1, 2, 2, 1)$ kein f -Vektor eines simplizialen Komplexes ist.

Das Ziel dieses Abschnitts ist eine Charakterisierung der f -Vektoren von Multikomplexen anzugeben. Wir werden diese Charakterisierung allerdings nicht beweisen, sondern lediglich die Ideen und die Hauptschritte angeben. Analog zur squashed Ordnung auf den i -elementigen Teilmengen definieren wir uns nun eine Ordnung auf den Monomen vom Grad i .

Definition 3.3.3. Seien $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ und $x^\beta = x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n}$ Monome vom Grad i . Dann setzen wir

$$x^\alpha \leq_{\text{lex}} x^\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta \text{ oder} \\ \alpha_j < \beta_j \text{ für } j = \min\{l : \alpha_l \neq \beta_l\} \end{cases}$$

Diese Ordnung heißt *lexikographische Ordnung*.

Beispiel 3.3.4. Für Monome in 2 Variablen vom Grad $i = 3$ gilt

$$x_2^3 \leq_{\text{lex}} x_1 x_2^2 \leq_{\text{lex}} x_1^2 x_2 \leq_{\text{lex}} x_1^3.$$

Wir können einen Multikomplex Δ auch als eine Menge von Vektoren auffassen, indem wir jedes Monom in Δ mit seinem Exponentenvektor identifizieren. Entsprechend sagen wir, dass ein Vektor den Grad i hat, wenn das zugrundeliegende Monom vom Grad i ist.

Definition 3.3.5. Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}^n$ eine Menge von Vektoren vom Grad i . Die Menge

$$\Delta \mathcal{A} = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n : \exists 1 \leq j \leq n \text{ so dass } (\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, \alpha_j + 1, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_n) \in \mathcal{A}\}$$

heißt *unterer Schatten* von $\mathcal{A}$.

Beispiel 3.3.6. Betrachte $\mathcal{A} = \{(4, 0, 0), (1, 2, 1), (0, 2, 2)\}$. Dann gilt

$$\Delta \mathcal{A} = \{(3, 0, 0), (0, 2, 1), (1, 1, 1), (1, 2, 0), (0, 1, 2)\}.$$

Definition 3.3.7. Für $0 \leq k_1 \leq \dots \leq k_n \in \mathbb{N}$ heißt $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ein k -Vektor, falls $\alpha_i \leq k_i$ für $1 \leq i \leq n$.

Beachte, dass im Spezialfall $k_1 = \dots = k_n$ k -Vektoren gerade den i -elementigen Teilmengen von $[n]$ entsprechen: $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mapsto A = \{i : \alpha_i = 1\}$. Analog zu der Situation bei Kruskal-Katona betrachtet man nun die ersten Elemente in der lexikographischen Ordnung auf Monomen bzw. Vektoren.

Definition 3.3.8. Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}^n$ eine Menge von k -Vektoren vom Grad i . Sei $\mathcal{C}\mathcal{A}$ die Menge der ersten $\#\mathcal{A}$ k -Vektoren in der lexikographischen Ordnung. Gilt $\mathcal{C}\mathcal{A} = \mathcal{A}$, so heißt $\mathcal{A}$ *komprimiert*.

Wir können nun bereits eine erste Version des Satzes von Clements-Lindström formulieren.

Satz 3.3.9 (Satz von Clements-Lindström). Sei $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ mit $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n$. Sei $\mathcal{A}$ eine Menge von k -Vektoren vom Grad i . Dann gilt

$$\Delta \mathcal{C}\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C} \Delta \mathcal{A}.$$

Insbesondere gilt $\# \Delta \mathcal{C}\mathcal{A} \leq \# \Delta \mathcal{A}$.

Eine Folgerung des Satzes von Clements-Lindström ist der Satz von Macaulay.

Satz 3.3.10 (Macaulay). Sei $\mathcal{A}$ eine Menge von k -Vektoren vom Grad i und sei $k = (i, \dots, i)$. Sei

$$\#\mathcal{A} = \binom{a_i}{i} + \dots + \binom{a_j}{j}$$

die i -Binomialdarstellung von $\#\mathcal{A}$. Dann gilt

$$\# \Delta \mathcal{A} \geq \binom{a_i - 1}{i - 1} + \dots + \binom{a_j - 1}{j - 1}.$$

Der Satz von Macaulay lässt sich noch in einer zweiten Version angeben.

Satz 3.3.11 (Macaulay). Sei $d \geq 0$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- (i) $f = (f_{-1}, f_0, \dots, f_{d-1})$ ist der f -Vektor eines $(d-1)$ -dimensionalen Multikomplexes Δ .
- (ii) $f_{-1} = 1$ und für $i \geq 0$ und $f_i = \binom{a_{i+1}}{i+1} + \dots + \binom{a_j}{j}$ in $(i+1)$ -Binomialdarstellung gilt

$$f_{i-1} \geq \binom{a_{i+1} - 1}{i} + \binom{a_i - 1}{i - 1} + \dots + \binom{a_j - 1}{j - 1}.$$

Zusätzlich zu der gegebenen Motivation hat der Satz von Macaulay auch noch eine algebraische Motivation. Sei $I \subseteq S = k[x_1, \dots, x_n]$ ein Ideal, das von homogenen Polynomen erzeugt wird und das die Eigenschaft hat, dass ein d existiert, so dass $(x_1, \dots, x_n)^{d+1} \subseteq I$, d.h. I

enthält alle Monome vom Grad größer gleich $d + 1$. In diesem Fall ist S/I endlich dimensional als k -Vektorraum und wir können schreiben $S = A_0 \oplus A_1 \oplus \dots \oplus A_d$, wobei A_i die Restklassen $m + I$ der Monome m vom Grad i enthält. Setzen wir $f = (\dim A_0, \dim A_1, \dots, \dim A_d)$, so kann man zeigen, dass f der f -Vektor eines Multikomplexes ist. Andererseits kann man zu jedem Multikomplex ein Ideal mit den beschriebenen Eigenschaften finden. Abschließend in diesem Abschnitt soll noch eine Charakterisierung der h -Vektoren vom Cohen-Macaulay Komplexen gegeben werden.

Sei im folgenden Δ ein $(d - 1)$ -dimensionaler simplizialer Komplex auf der Eckenmenge $[n]$ und sei $k[\Delta]$ der Stanley-Reisner Ring von Δ . Wir hatten gesehen, dass sich die Hilbert-Reihe von $k[\Delta]$ berechnet mittels

$$\text{Hilb}(k[\Delta], t) = \frac{h_0^\Delta + h_1^\Delta t + \dots + h_d^\Delta t^d}{(1 - t)^d}.$$

Ist Δ ein Cohen-Macaulay Komplex, so ist bekannt, dass eine Menge $\Theta = \{\theta_1, \dots, \theta_d\} \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ von Linearformen existiert, so dass der Quotient $k[\Delta]/\Theta$ ein endlich dimensionaler k -Vektorraum ist und

$$\text{Hilb}(k[\Delta], t) = h_0^\Delta + h_1^\Delta t + \dots + h_d^\Delta t^d$$

gilt. Mittels der vorhergehenden Bemerkungen lässt sich nun aus dem Theorem von Macaulay folgende Charakterisierung für h -Vektoren von Cohen-Macaulay Komplexen gewinnen.

Satz 3.3.12. *Sei $d \geq 0$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

- (i) $h = (h_0, \dots, h_d)$ ist der h -Vektor eines $(d - 1)$ -dimensionalen Cohen-Macaulay Komplexes.
- (ii) $h_0 = 1$ und für $i \geq 0$ und $h_i = \binom{a_i}{i} + \dots + \binom{a_j}{j}$ in i -Binomialdarstellung gilt

$$h_{i-1} \geq \binom{a_i - 1}{i - 1} + \binom{a_{i-1} - 1}{i - 2} + \dots + \binom{a_j - 1}{j - 1}.$$

4 Alexander Dualität und endliche Graphen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit partiell geordneten Mengen und endlichen Graphen, sowie deren algebraischen Eigenschaften. Diese sollen mit Hilfe von Alexander Dualität untersucht werden. Ziele sind die Klassifizierung Cohen-Macaulay bipartiter Graphen, sowie die Herleitung von Diracs Theorem über chordale Graphen. Der Schwerpunkt bei letzterem liegt dabei auf den algebraischen Aspekten und liefert eine vollständige Charakterisierung chordaler Graphen mittels vier verschiedener (äquivalenter) Bedingungen für den dazugehörigen Clique-Komplex bzw. dessen Alexander-Dual, sowie weiterer kombinatorischer Bedingungen an den Ausgangsgraphen.

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels werden wir zunächst einige theoretische Grundlagen, wie z. B. das Konzept der Auflösung eines Ideals einführen, die in den folgenden Abschnitten benötigt werden. Die meisten der dort präsentierten Ergebnisse werden ohne Beweis angegeben. Das Ziel des zweiten Abschnitts ist die Charakterisierung Cohen-Macaulay bipartiter Graphen. Neben dem Hauptergebnis dieses Abschnitts, nämlich der Charakterisierung Cohen-Macaulay bipartiter Graphen, wird zusätzlich noch das Theorem von Fröberg bewiesen, das chordale Graphen mittels Eigenschaften der Auflösung des komplementären Graphen charakterisiert. Der letzte Abschnitt dieses Kapitels zielt auf den Beweis von Diracs Theorem ab, das chordale Graphen auf mehrere verschiedene Möglichkeiten charakterisiert.

4.1 Auflösungen und die Formel von Hochster

4.1.1 Freie Auflösungen

Im folgenden sei $S = k[x_1, \dots, x_n]$ der Polynomring in n Variablen über einem beliebigen Körper k . Der Polynomring S ist auf natürliche Art und Weise $\mathbb{N}$ -graduiert, d.h. $S = \bigoplus_{i \geq 0} S_i$, wobei S_i von den Monomen vom Grad i erzeugt wird. Wir benötigen nun zunächst einige Notationen und Definitionen bevor wir zu dem in diesem Abschnitt relevanten Begriff einer Auflösung kommen.

Definition 4.1.1. (i) Ein S -Modul M heißt $\mathbb{N}$ -graduiert, falls $M = \bigoplus_{i \geq 0} M_i$ und $S_i M_j \subseteq M_{i+j}$.

(ii) Wir schreiben $S(-j)$ für den Modul, der sich aus S durch Shiften um j ergibt, d.h. für die i -te graduierte Komponente von $S(-j)$ gilt $S(-j)_i = S_{-j+i}$.

- (iii) Sind M und N graduierte S -Moduln, so heißt eine Abbildung $\phi : M \rightarrow N$ ein *homogener Homomorphismus vom Grad s* , falls $\phi(M_i) \subseteq N_{i+s}$ für alle i .

Beispiel 4.1.2. (i) Für ein monomiales oder homogenes Ideal $I \subseteq S$ ist S/I ein graduierter $\mathbb{N}$ -Modul. Die Graduierung wird dabei von der $\mathbb{N}$ - Graduierung von S induziert.

- (ii) $k[x_1, \dots, x_n](-2) = \bigoplus_{i \geq 2} k[x_1, \dots, x_n]_{i-2}$. Insbesondere hat das Element 1 in $k[x_1, \dots, x_n](-2)$ den Grad 2 und die Variablen haben den Grad 3.

- (iii) Die Multiplikation mit $x_1 x_2 x_3$ von $k[x_1, x_2, x_3]$ nach $k[x_1, x_2, x_3]$ ist ein homogener Morphismus vom Grad 3.

Wir kommen nun zu dem Begriff einer Auflösung.

Definition 4.1.3. Sei M ein endlich erzeugter graduierter S -Modul. Eine Sequenz

$$\mathbb{F} : \dots \xrightarrow{\phi_3} F_2 \xrightarrow{\phi_2} F_1 \xrightarrow{\phi_1} F_0 \xrightarrow{\phi_0} M \rightarrow 0$$

mit den Eigenschaften, dass

- $\mathbb{F}$ exakt ist, d.h. $\text{Ker}\phi_i = \text{Im}\phi_{i+1}$ für alle i ,
- $F_i = \bigoplus_{j \geq 0} S(-j)^{\beta_{ij}}$ für $\beta_{ij} \in \mathbb{N}$,
- die Abbildungen $\phi_i : F_i \rightarrow F_{i-1}$ sind homogene Homomorphismen vom Grad 0 für alle i

heißt *graduierter freie S -Auflösung* von M .

Da wir bisher nur den Begriff einer Auflösung definiert haben, wollen wir nun dazu kommen, wie man eine Auflösung konstruieren kann.

Konstruktion 4.1.4. Sei M ein endlich erzeugter graduierter S -Modul und seien $m_1, \dots, m_r$ homogene Erzeuger von M . Sei weiter $\deg(m_i) = a_i$. Für jeden Erzeuger m_i betrachte eine Kopie des Polynomrings S , die von einem Element e_i erzeugt wird. Dann ist $\phi_0 : \bigoplus_{i=1}^r S e_i \rightarrow M : e_i \mapsto m_i$ ein S -Modul Homomorphismus und setzen wir $\deg(e_i) = a_i$, so ist dieser sogar homogen vom Grad 0. Ferner ist $S e_i$ mit dieser Graduierung offensichtlich isomorph zu $S(-a_i)$. Auf diese Art und Weise bekommen wir eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \text{Ker}\phi_0 \rightarrow \bigoplus_j S(-j)^{\beta_{0j}} \rightarrow M \rightarrow 0,$$

wobei $\beta_{0j} = \#\{i : a_i = j\}$. Im nächsten Schritt wählen wir eine endliche Menge an Erzeugern für $\text{Ker}\phi_0$ (eine solche Menge existiert nach dem Hilbertschen Basissatz für Moduln) und wie zuvor können wir einen Morphismus $\bigoplus_j S(-j)^{\beta_{1j}} \rightarrow \text{Ker}\phi_0$ definieren, wobei β_{1j} die Anzahl der Erzeuger von $\text{Ker}\phi_0$ vom Grad j ist. Durch Verknüpfung mit der Inklusion $\text{Ker}\phi_0 \rightarrow$

$\bigoplus_j S(-j)^{\beta_{0j}}$ liefert dies einen homogenen Morphismus $\bigoplus_j S(-j)^{\beta_{1j}} \rightarrow \bigoplus_j S(-j)^{\beta_{0j}}$. Insgesamt erhalten wir die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \bigoplus_j S(-j)^{\beta_{1j}} \rightarrow \bigoplus_j S(-j)^{\beta_{0j}} \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Führen wir diese Konstruktion fort, so erhalten wir schließlich eine graduierte freie Auflösung von M .

Wir haben nun gesehen, dass Auflösungen existieren und auch ein Verfahren kennengelernt um sie zu konstruieren, allerdings ist auch offensichtlich, dass sie in keinster Weise eindeutig sind. Wählen wir jedoch in jedem Schritt des Verfahrens eine minimale Menge an Erzeugern, das heißt keine echte Teilmenge ist eine Menge von Erzeugern, so ist die erhaltene Auflösung, bis auf Isomorphie, eindeutig.

Definition 4.1.5. Sei M ein endlich erzeugter graduierter S -Modul. Dann heißt eine graduierte freie Auflösung von M *minimal*, falls $\phi_i(F_i) \subseteq (x_1, \dots, x_n)F_{i-1}$ für alle i .

Bemerkung 4.1.6. Man kann zeigen, dass die minimale graduierte freie Auflösung eines endlich erzeugten graduierten S -Moduls bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist.

Gemäß der vorigen Bemerkung macht die folgende Definition Sinn.

Definition 4.1.7. Sei M ein endlich erzeugter graduierter S -Modul und sei

$$\mathbb{F} : \dots \xrightarrow{\phi_3} F_2 \xrightarrow{\phi_2} F_1 \xrightarrow{\phi_1} F_0 \xrightarrow{\phi_0} M \rightarrow 0$$

die minimale graduierte freie S -Auflösung von M , wobei $F_i = \bigoplus_{j \geq 0} S(-j)^{\beta_{ij}}$. Dann heißen die Zahlen β_{ij} *graduierte Bettizahlen* von M und $\beta_i = \sum_j \beta_{ij}$ heißt *i -te Bettizahl* von M .

Nachdem wir bereits die Frage der Eindeutigkeit behandelt haben, stellt sich als nächstes die Frage, ob graduierte minimale freie Auflösungen endlich sind. Betrachtet man keine S -Moduln, sondern Moduln über einem gewöhnlichen Ring, so lautet die Antwort im allgemeinen nein. In der Situation, für die wir uns interessieren, d.h. im Falle von Moduln über dem Polynomring ist die Antwort jedoch positiv. Genauer gilt folgendes:

Theorem 4.1.8 (Hilbertscher Syzygiensatz). *Ist M ein endlich erzeugter graduierter $k[x_1, \dots, x_n]$ -Modul, so hat M eine endliche graduierte freie Auflösung der Länge kleiner gleich n .*

Insbesondere folgt aus dem Hilbertschen Syzygiensatz also, dass die minimale freie Auflösung eines S -Moduls M endlich ist.

Definition 4.1.9. Sei M ein S -Modul. Ist

$$\mathbb{F} : 0 \rightarrow F_p \xrightarrow{\phi_p} \dots \xrightarrow{\phi_3} F_2 \xrightarrow{\phi_2} F_1 \xrightarrow{\phi_1} F_0 \xrightarrow{\phi_0} M \rightarrow 0$$

die minimale freie graduierte Auflösung von M , wobei $F_i = \bigoplus_{j \geq 0} S(-j)^{\beta_{ij}}$, so nennen wir p die *projektive Dimension* von M (geschrieben $\text{proj dim}(M)$). Ferner heißt $\max\{|j - i| : \beta_{ij} \neq 0\}$ die *Regularität* von M (geschrieben $\text{reg}(M)$).

Die Regularität beschreibt uns also den maximalen Shift in der Graduierung, der in der Auflösung auftritt. Im folgenden werden wir uns für Auflösungen interessieren, die sehr einfach sind, in dem Sinne, dass fast alle Bettizahlen verschwinden und zusätzlich in jedem Schritt die Regularität erreicht wird.

Definition 4.1.10. Sei M ein endlich erzeugter graduierter S -Modul. Die minimale graduierte freie Auflösung von M heißt d -linear, falls $\beta_{ij} \neq 0$ genau dann wenn $j = i + d$, d.h. die minimale graduierte freie Auflösung von M ist von der Form

$$\mathbb{F} : 0 \rightarrow S(-p-d)^{\beta_p} \rightarrow \dots \rightarrow S(-2-d)^{\beta_2} \rightarrow S(-1-d)^{\beta_1} \rightarrow S(-d)^{\beta_0} \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Im folgenden werden wir überwiegend Auflösungen von Idealen betrachten. Um zu zeigen, dass ein Ideal eine lineare Auflösung besitzt, werden wir ein hinreichendes Kriterium verwenden. Bevor wir dieses angeben können, benötigen wir jedoch noch eine Definition.

Definition 4.1.11. Sei $I \subseteq S$ ein homogenes Ideal, d.h. I wird von homogenen Polynomen erzeugt. Das Ideal I hat *lineare Quotienten*, falls es eine Menge $f_1, \dots, f_m$ homogener Erzeuger gibt, so dass $(f_1, \dots, f_{i-1}) : (f_i)$ von Linearformen erzeugt wird für jedes i .

Satz 4.1.12. Sei $I \subseteq S$ ein homogenes Ideal, das von Polynomen vom Grad d erzeugt wird. Hat I lineare Quotienten, so ist die minimale graduierte freie Auflösung von I d -linear.

4.1.2 Freie Auflösungen und simpliziale Komplexe

Nachdem wir im vorigen Abschnitt das Konzept von freien Auflösungen für beliebige S -Moduln definiert haben, wollen wir im hiesigen Abschnitt nun Auflösungen von Stanley-Reisner Idealen betrachten. Ohne die genauen Auflösungen berechnen zu müssen, kann man in diesem Fall die graduierten Betti-Zahlen des Stanley-Reisner Ideals bereits aus der Kenntnis der Homologie des zugrunde liegenden simplizialen Komplexes bzw. des Alexander Duals sowie gewisser Unterkomplexe von diesen berechnen. Dies leistet das Theorem von Hochster. Das Theorem von Eagon-Reiner wird uns ferner ein Kriterium für die Linearität der minimalen graduierten freien Auflösung des Stanley-Reisner Ideals mittels des Alexander Duals liefern. Schließlich bringt das Theorem von Terai noch die Regularität des Stanley-Reisner Ideals mit der projektiven Dimension des Stanley-Reisner Ideals des Alexander Duals in Verbindung.

Definition 4.1.13. Sei Δ ein simplizialer Komplex auf der Eckenmenge $[n]$. Das *Alexander Dual* von Δ ist der simpliziale Komplex

$$\Delta^* = \{F \subseteq [n] : [n] \setminus F \notin \Delta\}.$$

Theorem 4.1.14 (Hochster Formel). Sei Δ ein simplizialer Komplex auf der Eckenmenge $[n]$. Seien $\beta_{ij}(I_\Delta)$ die graduierten Bettizahlen von I_Δ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \beta_{ij}(I_\Delta) &= \sum_{F \in \Delta^*, \#F=n-j} \dim_k \tilde{H}_{i-1}(\text{lk}_{\Delta^*}(F); k) \\ &= \sum_{W \subseteq [n], \#W=j} \dim_k \tilde{H}_{j-i-2}(\Delta_W; k). \end{aligned}$$

Dabei ist für eine Teilmenge $W \subseteq [n]$

$$\Delta_W = \{F \in \Delta : F \subseteq W\}$$

die Einschränkung von Δ zu W .

Als Folgerung der Hochster Formel erhalten wir ferner das Theorem von Eagon-Reiner.

Theorem 4.1.15 (Eagon-Reiner). *Sei Δ ein simplizialer Komplex auf der Eckenmenge $[n]$ und sei k ein Körper. Dann sind folgende Aussagen äquivalent*

- (i) *Das Stanley-Reisner Ideal $I_\Delta \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ hat eine d -lineare Auflösung.*
- (ii) *Das Alexander Dual Δ^* ist Cohen-Macaulay über k und $\dim \Delta^* = n - d - 1$.*

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Angenommen I_Δ hat eine d -lineare Auflösung. Dann ist $\beta_{0d} \neq 0$ und $\beta_{0i} = 0$ für $i \neq d$. Insbesondere haben deshalb alle minimalen Nicht-Seiten von Δ die Kardinalität d . Da die Facetten von Δ^* gerade die Komplemente der minimalen Nicht-Seiten von Δ sind, folgt daraus, dass Δ^* rein ist und es gilt $\dim \Delta^* = n - d - 1$. Sei nun $F \in \Delta^*$. Gemäß dem Kriterium von Reisner müssen wir zeigen, dass $\tilde{H}_i(\text{lk}_{\Delta^*}(F); k) = 0$ gilt für $0 \leq i < \dim \text{lk}_{\Delta^*}(F) = (n - d) - \#F - 1$. Gilt $\#F = n - j$, so folgt aus der Hochster Formel $\tilde{H}_{i-1}(\text{lk}_{\Delta^*}(F); k) = 0$ für $j \neq i + d$, d.h. $\tilde{H}_i(\text{lk}_{\Delta^*}(F); k) = 0$ für $i \neq j - d - 1$. Da $(n - d) - \#F - 1 = (n - d) - (n - j) - 1 = j - d - 1$, folgt damit die Behauptung.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sei Δ^* ein Cohen-Macaulay Komplex der Dimension $d - 1$. Sei $F \in \Delta^*$ mit $\#F = n - j$. Um zu zeigen, dass I_Δ eine $(n - d)$ -lineare Auflösung hat, müssen wir zeigen, dass $\beta_{ij}(I_\Delta) = 0$ gilt für $j \neq i + n - d$. Gemäß der Hochster Formel ist dazu zu zeigen, dass $\tilde{H}_{i-1}(\text{lk}_{\Delta^*}(F); k) = 0$ gilt für $\#F = n - j \neq n - (i + n - d) = d - i$, d.h. $\tilde{H}_i(\text{lk}_{\Delta^*}(F); k) = 0$ für $i \neq d - n + j - 1$. Da Δ^* Cohen-Macaulay ist, folgt aus dem Reisner-Kriterium, dass $\tilde{H}_i(\text{lk}_{\Delta^*}(F); k) = 0$ gilt für $i \neq \dim \text{lk}_{\Delta^*}(F) = d - 1 - \#F = d - 1 - (n - j) = d - n + j - 1$. Dies zeigt die Behauptung. $\square$

Das folgende Theorem von Terai stellt einen Zusammenhang zwischen Regularität und projektiver Dimension der Stanley-Reisner Ideale eines simplizialen Komplexes bzw. dessen Alexander Duals her.

Theorem 4.1.16 (Terai). *Sei Δ ein simplizialer Komplex. Dann gilt*

$$\text{proj dim } I_\Delta = \text{reg}(I_{\Delta^*}) - 1$$

4.2 Cohen-Macaulay bipartite Graphen

In diesem Abschnitt sind wir an Cohen-Macaulay Graphen interessiert. Wir werden diese zunächst definieren und dann eine Klassifizierung Cohen-Macaulay bipartiter Graphen erarbeiten. Eines der Hilfsmittel, die wir benötigen werden, ist das im vorigen Abschnitt bewiesene Theorem von Eagon-Reiner (Theorem 4.1.15).

4.2.1 Endliche Graphen und Kantenideale

In diesem Abschnitt werden wir die benötigten Begriffe aus der Graphentheorie zusammenstellen.

Definition 4.2.1. Ein *Graph* ist ein Tupel $G = (V, E)$, wobei V eine Menge von *Knoten* ist und $E \subseteq \binom{V}{2}$ eine Menge von *Kanten*.

Im folgenden werden wir nur Graphen mit endlicher Knotenmenge betrachten, ohne dies jedoch explizit zu erwähnen. Wir werden weiterhin annehmen, dass der Graph *einfach* ist, das heißt es existieren weder *Schleifen* noch *Mehrfachkanten*. Häufig werden Graphen mit speziellen Eigenschaften eine besondere Rolle spielen bzw. wir interessieren uns für spezielle auftretende Unterstrukturen.

Definition 4.2.2. (i) Ist $\#V = n$, so heißt $K_V = (V, \binom{V}{2})$ ein *vollständiger Graph* auf der Knotenmenge V .

(ii) Ein *Pfad* von $v \in V$ nach $w \in V$ in einem Graphen $G = (V, E)$ ist eine Folge von Kanten $p = (\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \dots, \{v_{s-1}, v_s\})$ mit $v = v_0$ und $w = v_s$. Dabei heißt s die *Länge* von p .

(iii) Ist $C = (\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \dots, \{v_{s-1}, v_0\})$ ein Pfad mit $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$, so nennen wir C einen *Kreis* der Länge s .

(iii) Ist C ein Kreis in G und sind v_i, v_j Knoten von C , so dass $\{v_i, v_j\}$ keine Kante in C ist, so heißt $\{v_i, v_j\}$ eine *Sehne* (engl. chord) von C . Wir nennen einen Graph *chordal*, falls jeder Kreis der Länge größer als 3 eine Sehne besitzt.

Ist $G = (V, E)$ ein Graph und $W \subseteq V$, so kann man den von G auf W *induzierten Teilgraph* G_W betrachten. Genauer ist $G_W = (W, E \cap \binom{W}{2})$. Es ist klar, dass die Bedingung chordal zu sein dazu äquivalent ist, dass jeder induzierte Kreis C , d.h. $C = G_W$ für ein $W \subseteq V$, die Länge 3 hat. Insbesondere ist damit auch jeder induzierte Teilgraph eines chordalen Graphen erneut chordal.

Definition 4.2.3. (i) Eine *Clique* in einem $G = (V, E)$ ist eine Teilmenge $W \subseteq V$, so dass der induzierte Graph G_W ein vollständiger Graph auf der Eckenmenge W ist.

(ii) Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *zerlegbar*, falls echte Teilmengen P und Q von V existieren, so dass $V = P \cup Q$, $P \cap Q$ eine Clique in G ist und für $v \in P \setminus Q$ und $w \in Q \setminus P$ gilt $\{v, w\} \notin E$.

Wir haben nun alle notwendigen Begriffe, um das erste Ergebnis über chordale Graphen anzugeben.

Lemma 4.2.4. Sei $G = (V, E)$ ein chordaler Graph. Dann ist G entweder vollständig oder zerlegbar.

Beweis. Wir nehmen an, dass G kein vollständiger Graph ist. In diesem Fall existieren Knoten $v, w \in V$ mit $\{v, w\} \notin E$. Offensichtlich besitzt die Menge $A = V \setminus \{v, w\}$ die folgende Eigenschaft: Es existieren Mengen $P, Q \subseteq V$, so dass

- $P \cap Q = A$,
- $P \cup Q = V$,
- für $v \in P \setminus Q$ und $w \in Q \setminus P$ gilt $\{v, w\} \notin E$.

Im folgenden werden wir eine Teilmenge von V mit diesen Eigenschaften als *Separator* bezeichnen. Sei nun $B \subseteq V \setminus \{v, w\}$ ein (bzgl. Inklusion) minimaler Separator von G .

Behauptung: B ist eine Clique.

Ist $\#B = 1$, so folgt sofort die Behauptung. Sei also $\#B \geq 2$. Bezeichnen B_1 und B_2 die entsprechenden Mengen für B , so dass alle drei Bedingungen aus der Definition eines Separators erfüllt sind. Wir beweisen die Behauptung per Widerspruch. Angenommen B ist keine Clique. Dann existieren zwei Knoten $a, b \in B$, so dass $\{a, b\} \notin E$. Seien $C_1, \dots, C_s$ bzw. $D_1, \dots, D_r$ die Zusammenhangskomponenten der induzierten Graphen auf $B_1 \setminus B$ bzw. $B_2 \setminus B$.

Behauptung: Es existiert ein Knoten $c_a \in C_1$ mit $\{a, c_a\} \in E$.

Angenommen es gilt $\{c, a\} \notin E$ für alle $c \in C_1$. Wir zeigen, dass dann $\tilde{B} = B \setminus \{a\}$ ein Separator von G ist. Da $\tilde{B} \subsetneq B$ gilt, liefert dies einen Widerspruch zur Minimalität von B . In der Tat, sei V_1 die Knotenmenge von C_1 und sei $P = V_1 \cup \tilde{B}$ und $Q = V \setminus V_1$. Es gilt $P \cup Q = V$ und $P \cap Q = \tilde{B}$. Sei $u \in P \setminus Q = V_1$ und $z \in Q \setminus P = V \setminus V_1 \setminus \tilde{B}$. Ist $z \neq a$, so gilt $\{u, z\} \notin E$ per Konstruktion. Ist $z = a$, so gilt $\{u, z\} \notin E$ nach Annahme.

Entsprechend existieren auch Knoten $c_b \in C_1$ mit $\{b, c_b\} \in E$ und $d_a, d_b \in D_1$ mit $\{a, d_a\} \in E$ und $\{b, d_b\} \in E$. Aus dem bereits gezeigten und der Tatsache, dass C_1 und D_1 zusammenhängend sind, folgt, dass es Pfade von a nach b gibt, die nur Knoten in $V_1 \cup \{a, b\}$ bzw. $W_1 \cup \{a, b\}$ verwenden, wobei W_1 die Knotenmenge von D_1 bezeichnet. Seien P_1 und P_2 zwei solcher Pfade minimaler Länge. Die Komposition dieser beiden Pfade ergibt einen Kreis der Länge größer als 3. Da G chordal ist, muss eine Sehne existieren. Da nach Konstruktion $\{c, d\} \notin E$ gilt für $c \in V_1$ und $d \in W_1$ und da P_1 und P_2 minimal gewählt werden, muss $\{a, b\}$ der Chord sein. Es gilt also $\{c, d\} \in E$ und dies liefert einen Widerspruch zur Annahme. Damit folgt, dass B eine Clique sein muss und G ist somit zerlegbar. $\square$

Im folgenden werden wir zur Vereinfachung der Notation stets Graphen auf der Knotenmenge $[n]$ betrachten.

Definition 4.2.5. Sei $G = ([n], E)$ ein Graph. Dann heißt der simpliziale Komplex

$$\Delta(G) = \{A \subseteq [n] : A \text{ ist Clique in } G\}$$

der *Cliquen-Komplex* von G .

Man rechnet leicht nach, dass $\Delta(G)$ in der Tat ein simplizialer Komplex ist. Es wird sich herausstellen, dass im Falle chordaler Graphen Cliquen-Komplexe zusammenziehbar sind, falls

sie zusammenhängend sind. Um dies zu zeigen, benötigen wir jedoch noch ein Hilfsmittel, die sog. *Mayer-Vietoris Sequenz*.

Satz 4.2.6. *Seien Δ und Γ simpliziale Komplexe. Dann ist die folgende Sequenz exakt*

$$\begin{aligned} \dots &\xrightarrow{g_{i+1}^*} \tilde{H}_{i+1}(\Delta \cup \Gamma; k) \xrightarrow{h_{i+1}^*} \tilde{H}_i(\Delta \cap \Gamma; k) \\ &\xrightarrow{f_i^*} \tilde{H}_i(\Delta; k) \oplus \tilde{H}_i(\Gamma; k) \xrightarrow{g_i^*} \tilde{H}_i(\Delta \cup \Gamma; k) \xrightarrow{h_i^*} \dots \end{aligned}$$

Dabei sind die Abbildungen folgendermaßen definiert:

- (i) f_i^* wird von $f_i : C_i(\Delta \cap \Gamma; k) \rightarrow C_i(\Delta; k) \oplus C_i(\Gamma; k) : c \mapsto (c, -c)$ induziert.
- (ii) g_i^* wird von $g_i : C_i(\Delta; k) \oplus C_i(\Gamma; k) \rightarrow C_i(\Delta \cup \Gamma; k) : (c, d) \mapsto c + d$ induziert.
- (iii) Sei $z \in \tilde{H}_{i+1}(\Delta \cup \Gamma; k)$. Sei $x \in C_i(\Delta; k)$, so dass $z - x \in C_i(\Gamma; k)$. Dann ist $h_i^*(z)$ ein Repräsentant der Homologieklassse von $\partial_i(x)$.

Korollar 4.2.7. *Sei $G = ([n], E)$ ein chordaler Graph und $\Delta(G)$ der Cliques-Komplex von G . Dann gilt $\tilde{H}_i(\Delta(G); k) = 0$ für $i \neq 0$.*

Beweis. Der Beweis ist mittels Induktion über die Anzahl der Ecken n von G . Ist G ein vollständiger Graph, so ist $\Delta(G)$ ein $(n-1)$ -Simplex, als solcher zusammenziehbar und hat damit insbesondere triviale Homologie. Ist G nicht vollständig, so ist nach Lemma 4.2.4 G zerlegbar. Folglich existieren echte Teilmengen $P, Q \subseteq [n]$ mit $P \cup Q = [n]$, so dass $P \cap Q$ eine Clique ist und für $v \in P \setminus Q$ und $w \in Q \setminus P$ gilt $\{v, w\} \notin E$. Es gilt $\Delta(G) = \Delta(G_P) \cup \Delta(G_Q)$, sowie $\Delta(G_{P \cap Q}) = \Delta(G_P) \cap \Delta(G_Q)$. Aus Satz 4.2.6 folgt, dass wir folgende Mayer-Vietoris exakte Sequenz haben

$$\begin{aligned} \dots &\rightarrow \tilde{H}_i(\Delta(G_{P \cap Q}); k) \rightarrow \tilde{H}_i(\Delta(G_P); k) \oplus \tilde{H}_i(\Delta(G_Q); k) \rightarrow \tilde{H}_i(\Delta(G); k) \\ &\rightarrow \tilde{H}_{i-1}(\Delta(G_{P \cap Q}); k) \rightarrow \tilde{H}_{i-1}(\Delta(G_P); k) \oplus \tilde{H}_{i-1}(\Delta(G_Q); k) \rightarrow \tilde{H}_{i-1}(\Delta(G); k) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Da G_P und G_Q induzierte Teilgraphen von G sind, sind diese auch chordal und da P, Q echte Teilmengen von $[n]$ sind, gilt nach Induktionsvoraussetzung $\tilde{H}_i(\Delta(G_P); k) = \tilde{H}_i(\Delta(G_Q); k) = 0$ für $i \geq 1$. Zusätzlich ist $G \cap Q$ nach Voraussetzung eine Clique und damit ist $\Delta(G_{P \cap Q})$ ein Simplex und es gilt $\tilde{H}_i(\Delta(G_{P \cap Q}); k) = 0$ für alle i . Aus obiger Mayer-Vietoris Sequenz folgt daher $\tilde{H}_i(\Delta(G); k) = 0$ für $i \geq 1$. $\square$

Als nächstes werden wir sog. Kantenideale von Graphen betrachten und ein Kriterium dafür angeben damit diese Ideale eine lineare Auflösung haben (siehe Theorem von Fröberg).

Definition 4.2.8. Sei $G = ([n], E)$ ein Graph und sei $S = k[x_1, \dots, x_n]$. Das monomiale Ideal

$$I(G) = (x_i x_j : (i, j) \in E) \subseteq S$$

heißt das *Kantenideal* von G .

Zusätzlich benötigen wir noch folgende Definition.

Definition 4.2.9. Sei $G = ([n], E)$ ein Graph. Dann heißt $\overline{G} = ([n], \binom{[n]}{2} \setminus E)$ der zu G komplementäre Graph.

Bemerkung 4.2.10. Es ist leicht zu sehen, dass das Kantenideal von G gerade das Stanley-Reisner Ideal des Cliques-Komplexes des komplementären Graphes ist, d.h. es gilt $I(G) = I_{\Delta(\overline{G})}$.

Theorem 4.2.11 (Fröberg). Sei $G = ([n], E)$ ein Graph. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) Das Kantenideal $I(G)$ von G hat eine 2-lineare Auflösung.
- (ii) $\overline{G}$ ist chordal.

Beweis. Es gilt $I(G) = I_{\Delta(\overline{G})}$ und damit hat $I(G)$ genau dann eine 2-lineare Auflösung, wenn $I_{\Delta(\overline{G})}$ eine solche hat. Gemäß der Formel von Hochster 4.1.14 ist dies genau dann der Fall, wenn $\tilde{H}_{|W|-i-2}(\Delta(\overline{G})_W; k) = 0$ für alle $W \subseteq [n]$ und $|W| \neq i+2$, d.h. $\tilde{H}_i(\Delta(\overline{G})_W; k) = 0$ für alle $W \subseteq [n]$ und $i \neq 0$.

Wir zeigen zunächst (i) $\Rightarrow$ (ii). Angenommen $\overline{G}$ ist nicht chordal. Dann existiert ein Kreis C in $\overline{G}$ der Länge größer 3 ohne eine Sehne. Weiter gilt dann $\Delta(\overline{G})_C = C$, d.h. die geometrische Realisierung von $\Delta(\overline{G})_C$ ist homeomorph zu einer $\mathbb{S}^1$ und aus Satz 2.1.8 (i) folgt $\tilde{H}_1(\Delta(\overline{G})_C; k) = k$. Nach der zuvor geführten Diskussion kann $I(G)$ dann aber keine 2-lineare Auflösung haben. Wir zeigen nun (ii) $\Rightarrow$ (i). Sei $\overline{G}$ chordal. Sei $W \subseteq [n]$. Da jeder induzierte Teilgraph eines chordalen Graphen chordal ist, ist dann auch $\overline{G}_W$ chordal und nach Korollar 4.2.7 gilt $\tilde{H}_i(\Delta(\overline{G}_W); k) = 0$ für $i \neq 0$. Weiter gilt $\Delta(\overline{G}_W) = \Delta(\overline{G})_W$ und damit folgt $\tilde{H}_i(\Delta(\overline{G})_W; k) = 0$ für $i \neq 0$. Dies zeigt, dass $I(G)$ eine 2-lineare Auflösung hat. $\square$

4.2.2 Endliche partiell geordnete Mengen

Der Schwerpunkt dieses Abschnitts bilden partiell geordnete Mengen (kurz: *posets*), dazu assoziierte Ideale, sowie deren Auflösungen. Wir benötigen zunächst einige Definitionen.

Definition 4.2.12. (i) Eine *partiell geordnete Menge* (kurz: *poset*) $(P, \leq_P)$ ist eine Menge $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ mit einer Relation $\leq_P$, die reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

- (ii) Sei $(P, \leq_P)$ eine endliche partiell geordnete Menge. Eine Teilmenge $A \subseteq P$ mit der Eigenschaft, dass aus $a \in A$ und $b \leq_P a$ schon $b \in A$ folgt, heißt *Poset-Ideal*. Wir schreiben $\mathcal{I}(P)$ für die Menge aller Poset-Ideale von P .

Sei nun $(P, \leq_P)$ eine partiell geordnete Menge und $P = \{p_1, \dots, p_n\}$. Im folgenden werden wir ein monomiales Ideal in $k[x, y] := k[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$ konstruieren, das durch die Menge der Poset-Ideale $\mathcal{I}(P)$ beschrieben wird. Sei dafür $A \in \mathcal{I}(P)$. Wir definieren

$$u_A = \left(\prod_{p_i \in A} x_i \right) \left(\prod_{p_j \notin A} y_j \right)$$

und setzen schließlich

$$H_P = (u_A : A \in \mathcal{J}(P)) \subseteq k[x, y].$$

Wir werden als erstes sehen, dass das gerade definierte Ideal H_P eine einfache Auflösung besitzt.

Theorem 4.2.13. *Sei $(P, \leq_P)$ eine endliche partiell geordnete Menge. Dann hat das Ideal H_P lineare Quotienten. Insbesondere ist die Auflösung von H_P linear.*

Beweis. Wir hatten bereits in den Übungsaufgaben folgende Aussage gezeigt:

Ein monomiales Ideal I hat genau dann lineare Quotienten bzgl. der monomialen Erzeuger $u_1, \dots, u_m$, falls für jedes $j < i$ ein $k < i$ und eine Zahl l existiert, so dass

$$\frac{u_k}{\text{ggT}(u_k, u_i)} = x_l \quad \text{und} \quad x_l \text{ teilt } \frac{u_j}{\text{ggT}(u_j, u_i)}.$$

Sei $G(H_P)$ die eindeutige Menge minimaler Erzeuger von H_P . Sei $\leq$ eine totale Ordnung auf $G(H_P)$, die die Eigenschaft hat, dass aus $u_A \leq u_B$ folgt $A \subseteq B$ oder A und B sind unvergleichbar und es gilt $\#A \leq \#B$ gilt. Sei $u_A \in G(H_P)$. Falls $\#A = 1$ gilt, so besteht A aus einem minimalen Element a von P . Ist u_A nicht das erste Element der Ordnung auf $G(H_P)$, so sei u_B ein Erzeuger mit $u_B \leq u_A$. Da A aus einem minimalen Element von P besteht, muss gelten $B = \emptyset$ oder A und B sind unvergleichbar. In letzterem Fall gilt $\#B = 1$, d.h. $B = \{b\}$, so folgt

$$\frac{u_B}{\text{ggT}(u_A, u_B)} = \frac{x_b \prod_{p_i \neq b} y_i}{\prod_{p_i \notin \{a, b\}} y_i} = x_b y_a.$$

Weiter gilt, für $B = \emptyset$,

$$\frac{u_B}{\text{ggT}(u_A, u_B)} = \frac{\prod_{i=1}^n y_i}{\prod_{p_i \neq a} y_i} = y_a$$

und obiges Kriterium für lineare Quotienten ist damit erfüllt. Sei nun $\#A \geq 2$ und $u_B < u_A$. Sind A und B unvergleichbar, so lässt sich auf ähnliche Art und Weise wie zuvor die Voraussetzung überprüfen. Sind A und B vergleichbar, dann gilt $B \subsetneq A$ und es existiert ein $c \in A \setminus B$. Ferner kann c so gewählt werden (maximal), dass $C := A \setminus \{c\}$ auch ein Poset-Ideal ist. Da $u_C = \frac{y_c u_A}{x_c}$ gilt, folgt $y_c = \frac{u_C}{\text{ggT}(u_C, u_A)}$. Da außerdem $c \notin B$ gilt, folgt dass y_c das Monom u_B teilt. Dies zeigt schließlich die Behauptung. $\square$

Per Definition ist H_P ein quadratfreies monomiales Ideal. Wir können H_P daher auch als Stanley-Reisner Ideal eines simplizialen Komplexes interpretieren. Sei Δ_P der simpliziale Komplex auf der Eckenmenge $V_n = \{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n\}$ mit $I_{\Delta_P} = H_P$. Wir interessieren uns im folgenden für das Alexander-Dual dieses simplizialen Komplexes.

Lemma 4.2.14. *Sei $(P, \leq_P)$ eine partiell geordnete Menge mit $P = \{p_1, \dots, p_n\}$. Dann wird das Stanley-Reisner Ideal $I_{\Delta_P}^*$ von Δ_P^* von den quadratischen Monomen $x_i y_j$ erzeugt mit $p_i \leq_P p_j$.*

Beweis. Wir legen zunächst einige Notationen fest. Für ein quadratfreies Monom $u \in k[x, y]$ sei F_u die Menge der Variablen in $k[x, y]$, die u teilen. Weiter schreiben wir kurz w für das Monom $x_1 \cdots x_n y_1 \cdots y_n$. Schließlich definieren wir für eine Teilmenge $F \subseteq V_n$ $F_x = F \cap \{x_1, \dots, x_n\}$ und $F_y = \{x_j : y_j \in F\}$.

Wir analysieren nun, wann eine Menge $F \subseteq V_n$ eine Seite von Δ_p^* ist. Ist $F \in \Delta_p^*$ eine Facette, so ist $V_n \setminus F$ eine minimale Nicht-Seite von Δ . Da per Definition $\mathcal{N}(\Delta_p) = \{F_{u_A} : A \in \mathcal{J}(P)\}$ gilt, folgt daher $\mathcal{F}(\Delta_p^*) = \{F_{\frac{w}{u_A}} : A \in \mathcal{J}(P)\}$. Somit gilt genau dann $F \in \Delta_p^*$, falls ein $A \in \mathcal{J}(P)$ existiert mit $F \subseteq F_{\frac{w}{u_A}}$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $F_x \subseteq (F_{\frac{w}{u_A}})_x$ und $F_y \subseteq (F_{\frac{w}{u_A}})_y$ gilt. Da $(F_{\frac{w}{u_A}})_x = \{x_j : p_j \notin A\}$ und $(F_{\frac{w}{u_A}})_y = \{x_j : p_j \in A\}$, folgt, dass $F \in \Delta_p^*$ genau dann, wenn ein Poset-Ideal A existiert mit $F_x \cap \{x_j : p_j \in A\} = \emptyset$ und $F_y \subseteq \{x_j : p_j \in A\}$. Insbesondere ist daher jede Menge der Form $\{x_i, y_j\}$, wobei $p_i \leq_P p_j$ gilt, eine minimale Nicht-Seite von Δ_p^* . Sei nun F eine beliebige Nicht-Seite von Δ_p^* . Wir müssen zeigen, dass i, j existieren mit $p_i \leq_P p_j$, so dass $\{x_i, y_j\} \subseteq F$ gilt. Da $\frac{w}{u_0} = x_1 \cdots x_n$ und $\frac{w}{u_p} = y_1 \cdots y_n$ gilt, sind nach obigem $2^{\{x_1, \dots, x_n\}}$ und $2^{\{y_1, \dots, y_n\}}$ Unterkomplexe von Δ_p^* . Ist $F \subseteq V_n$ eine Nicht-Seite von Δ_p^* , so muss also gelten $F_x \neq \emptyset$ und $F_y \neq \emptyset$. Ferner gilt für jedes Poset-Ideal A : $F_x \cap \{x_i : p_i \in A\} \neq \emptyset$ oder $F_y \not\subseteq \{x_j : p_j \in A\}$ gilt. Sei C das kleinste Poset-Ideal, das $\{p_j : x_j \in F_y\}$ enthält. Da nach Konstruktion $F_y \subseteq \{x_j : p_j \in C\}$ gilt, muss dann gelten $F_x \cap \{x_i : p_i \in C\} \neq \emptyset$. Sei daher $x_i \in F_x \cap \{x_j : p_j \in C\}$ und sei p_l ein maximales Element in C mit der Eigenschaft, dass $p_l \geq_P p_i$ gilt. Nach Definition von C gilt dann $x_l \in F_y$ und deshalb sogar $\{x_i, y_l\} \subseteq F$. Dies zeigt die Behauptung. $\square$

Gegeben eine partiell geordnete Menge $(P, \leq_P)$ bezeichnen wir mit $G(P)$ den Graph auf Knotenmenge V_n , dessen Kanten gerade die Mengen $\{x_i, y_j\}$ mit $p_i \leq_P p_j$ sind. Wir können $G(P)$ auch als Facetten-Komplex von $I_{\Delta_p^*}$ auffassen. Im nächsten Abschnitt werden wir zeigen, dass die so erhaltenen Graphen gerade die Klasse der bipartiten Cohen-Macaulay Graphen ergibt.

4.2.3 Cohen-Macaulay bipartite Graphen

Der Schwerpunkt in diesem Abschnitt liegt auf der Untersuchung Cohen-Macaulay bipartiter Graphen. Dabei werden wir einen Graph G Cohen-Macaulay nennen, wenn der Stanley-Reisner Komplex seines Kanten-Ideals Cohen-Macaulay ist. Insbesondere werden wir Cohen-Macaulay bipartite Graphen charakterisieren und zeigen, dass diese gerade von der Form $G(P)$, wobei P eine partiell geordnete Menge ist, sind.

Wir kommen nun zu der Definition von Cohen-Macaulay Graphen.

Definition 4.2.15. Sei $G = (V, E)$ ein endlicher Graph mit Kantenideal $I(G)$. Dann heißt G *Cohen-Macaulay über k* , falls der Stanley-Reisner Komplex $\Delta(I(G))$ Cohen-Macaulay über k ist.

Bemerkung 4.2.16. Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit einer isolierten Ecke v und sei $\tilde{G} = (V \setminus \{v\}, E)$. In diesem Fall ist $\Delta(I(G))$ der Kegel über $\Delta(I(\tilde{G}))$ mit Kegelpunkt v . Es ist leicht

zu sehen (Vergleich der Links), dass $\Delta(I(G))$ genau dann Cohen-Macaulay ist, wenn $\Delta(I(\tilde{G}))$ Cohen-Macaulay ist. Wir werden daher im folgenden stets annehmen, dass ein gegebener Graph G keine isolierte Ecke besitzt.

Analog zu Eckenüberdeckungen von simplizialen Komplexen kann man auch Eckeüberdeckungen für Graphen definieren.

Definition 4.2.17. (i) Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine Teilmenge $W \subseteq V$ heißt *Eckenüberdeckung* von V , falls $W \cap \{v, w\} \neq \emptyset$ für alle $\{v, w\} \in E$.

(ii) Eine Eckenüberdeckung W ist *minimal*, wenn keine echte Teilmenge von W eine Eckenüberdeckung von G ist.

(iii) Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *ungemischt*, falls jede minimale Eckenüberdeckung die gleiche Kardinalität hat.

Fassen wir einen Graph als 1-dimensionalen simplizialen Komplex auf, so ist eine Eckenüberdeckung des Graphen gerade eine Eckenüberdeckung dieses simplizialen Komplexes.

Der Zusammenhang zwischen Cohen-Macaulay und ungemischten Graphen ist der folgende:

Lemma 4.2.18. Sei $G = ([n], E)$ ein Cohen-Macaulay Graph. Dann ist G ungemischt.

Beweis. Seien $C_1, \dots, C_s$ die minimalen Eckenüberdeckungen von G . Wir hatten in den Übungen gesehen (vgl. auch Theorem 1.4.6), dass die Standard-Primärzerlegung von $I(G)$ durch die minimalen Eckenüberdeckungen von G (aufgefasst als simplizialer Komplex) bestimmt ist. Genauer ist die Standard-Primärzerlegung von $I(G)$ gerade

$$I(G) = \bigcap_{i=1}^s (x_v : v \in C_i).$$

Andererseits gilt aber auch $I(G) = I_{\Delta(I(G))}$. Die Standard-Primärzerlegung eines Stanley-Reisner Ideals (vgl. Theorem 1.4.5) ist wiederum gegeben durch

$$I_{\Delta(I(G))} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}(\Delta(I(G)))} (x_v : v \in [n] \setminus F).$$

Da $\Delta(I(G))$ nach Voraussetzung Cohen-Macaulay ist, ist $\Delta(I(G))$ insbesondere rein und es gilt $\#([n] \setminus F) = \#([n] \setminus G)$ für alle $F, G \in \mathcal{F}(\Delta)$. Wegen der Eindeutigkeit der Standard-Primärzerlegung folgt weiter, dass für jedes $1 \leq i \leq s$ ein $F \in \mathcal{F}(\Delta(I(G)))$ existiert, so dass $C_i = [n] \setminus F$. Insbesondere zeigt dies, dass alle minimalen Eckenüberdeckungen von G die selbe Kardinalität haben, d.h. G ist ungemischt. $\square$

Im folgenden werden wir bipartite Graphen betrachten. Der zu einer Poset P assoziierte Graph $G(P)$ aus dem letzten Abschnitt war ein erstes Beispiel für einen bipartiten Graphen-

- Definition 4.2.19.** (i) Sei $G = (V, E)$ ein endlicher Graph. G heißt *bipartit*, falls es eine disjunkte Zerlegung $V = V_1 \cup V_2$ gibt, so dass für $\{i, j\} \in E$ gilt $i \in V_1$ und $j \in V_2$ oder $i \in V_2$ und $j \in V_1$.
- (ii) Wir sagen, dass ein bipartiter Graph $G = (V, E)$ mit Bipartition $V = V_1 \cup V_2$ von einer Poset induziert wird, falls $\#V_1 = \#V_2 = n$ gilt und eine partiell geordnete Menge P auf n Elementen existiert, so dass (nach Umbenennung der Knoten von G) gilt $G(P) = G$.

Das Hauptziel in diesem Abschnitt wird es sein, den Zusammenhang zwischen bipartiten von einer Poset induzierten Graphen, sowie Cohen-Macaulay Graphen zu erarbeiten.

Lemma 4.2.20. Sei $G = (V, E)$ ein von einer Poset induzierter Graph. Dann ist G Cohen-Macaulay.

Beweis. Nach Voraussetzung existiert eine partiell geordnete Menge $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ mit Ordnungsrelation $\leq_P$, so dass $G(P) = G$. Das Kantenideal von G wird dann erzeugt von den Monomen $x_i y_j$ mit $p_i \leq_P p_j$. Gemäß Lemma 4.2.14 erzeugen die selben Monome aber auch das Stanley-Reisner Ideal von Δ_P^* , d.h. es gilt $I(G(P)) = I_{\Delta_P^*}$. Wir müssen daher zeigen, dass Δ_P^* Cohen-Macaulay ist. Nach dem Theorem von Eagon-Reiner (Theorem 4.1.15) ist dies der Fall genau dann, wenn I_{Δ_P} eine lineare Auflösung hat. Dies gilt jedoch wegen Theorem 4.2.13. $\square$

Wir werden sehen, dass sogar die Umkehrung des obigen Lemmas gilt. Bevor wir diese jedoch zeigen können benötigen wir noch einige Vorbereitungen.

Definition 4.2.21. Sei Δ ein reiner $(d-1)$ -dimensionaler simplizialer Komplex. Dann heißt Δ *zusammenhängend in Codimension 1*, falls für Facetten $F, G \in \Delta$ eine Sequenz von Facetten $F = F_0, F_1, \dots, F_{s-1}, F_s = G$ existiert, so dass $\#(F_i \cap F_{i+1}) = d-1$ gilt.

Als Vorbereitung für das Hauptergebnis in diesem Abschnitt benötigen wir folgende Aussage.

Lemma 4.2.22. Sei Δ ein Cohen-Macaulay Komplex. Dann ist $\text{lk}_\Delta(F)$ Cohen-Macaulay für alle $F \in \Delta$.

Beweis. Sei $F \in \Delta$ und $G \in \text{lk}_\Delta(F)$. Es gilt

$$\text{lk}_{\text{lk}_\Delta(F)}(G) = \text{lk}_\Delta(G \cup F).$$

Die Behauptung folgt dann direkt aus dem Reisner Kriterium. $\square$

Das folgende Lemma zeigt, dass Zusammenhang in Codimension 1 schon eine notwendige Bedingung für die Cohen-Macaulay Eigenschaft ist.

Lemma 4.2.23. Sei Δ ein Cohen-Macaulay Komplex. Dann ist Δ *zusammenhängend in Codimension 1*.

Beweis. Wir beweisen die Behauptung per Induktion über die Dimension von Δ . Ist $\dim \Delta = 0$, so ist die Behauptung offensichtlich erfüllt.

Sei $\dim \Delta \geq 1$. Seien F und G Facetten von Δ . Da Δ Cohen-Macaulay ist, ist Δ insbesondere zusammenhängend (vgl. 2.2.6). Es existiert daher eine Sequenz $F = F_0, F_1, \dots, F_{s-1}, F_s = G$ mit $F_i \in \mathcal{F}(\Delta)$ für $0 \leq i \leq s$, so dass $F_i \cap F_{i+1} \neq \emptyset$. Sei $v_i \in F_i \cap F_{i+1}$ eine Ecke. Nach Lemma 4.2.22 ist auch $\text{lk}_\Delta(\{v_i\})$ Cohen-Macaulay. Da $\dim \text{lk}_\Delta(\{v_i\}) = \dim \Delta - 1$, folgt per Induktion, dass $\text{lk}_\Delta(\{v_i\})$ zusammenhängend in Codimension 1 ist. Insbesondere existiert eine Sequenz von Facetten $F_i = H_0, H_1, \dots, H_{m-1}, H_m = F_{i+1}$ von Δ mit $v_i \in H_j$ für $0 \leq j \leq m$ und $\#(H_j \cap H_{j+1}) = \dim \Delta$. Weiterhin erhalten wir für jedes i eine solche Sequenz zwischen F_i und F_{i+1} . Durch Aneinanderreihung dieser Sequenzen erhalten wir schließlich eine Sequenz zwischen F und G mit den gewünschten Eigenschaften. $\square$

Für den Beweis der Umkehrung von Lemma 4.2.20 benötigen wir den sog. Heiratssatz für Graphen. Wir werden diesen jedoch nicht beweisen.

Proposition 4.2.24. *Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph mit Bipartition $V = V_1 \cup V_2$ mit $\#V_1 = \#V_2$. Für jede Teilmenge $W \subseteq V_1$ sei $N(W) = \{i \in V_2 : \{i, j\} \in E \text{ für ein } j \in W\}$ die so genannte Nachbarschaft von W . Gilt $\#N(W) \geq \#W$ für alle $W \subseteq V_1$, so existiert eine Bijektion $f : V_1 \rightarrow V_2$, so dass $\{i, f(i)\} \in E$ gilt für alle $i \in V_1$.*

Schließlich formulieren und beweisen wir das Hauptergebnis.

Theorem 4.2.25. *Ein bipartiter Graph $G = (V, E)$ ist genau dann Cohen-Macaulay, wenn er von einer endlichen Poset induziert wird.*

Beweis. „ $\Leftarrow$ “: Ist G ein von einer Poset induzierter bipartiter Graph, so folgt bereits aus Lemma 4.2.20, dass G Cohen-Macaulay ist.

„ $\Rightarrow$ “: Sei $G = (V, E)$ ein Cohen-Macaulay bipartiter Graph. Der Beweis geht in mehreren Schritten vor.

Schritt 1: Sei $V = V_1 \cup V_2$ die Bipartition der Eckenmenge von V . Offensichtlich sind sowohl V_1 als auch V_2 minimale Eckenüberdeckungen von G . Gemäß Lemma 4.2.18 ist G ungemischt und deshalb gilt $\#V_1 = \#V_2$. Sei $V_1 = \{x_1, \dots, x_n\}$ und $V_2 = \{y_1, \dots, y_n\}$.

Schritt 2: Für eine Teilmenge $U \subseteq V_1$ bezeichne

$$N(U) = \{y_j : \{x_i, y_j\} \in E \text{ für ein } x_i \in U\}$$

die so genannte Nachbarschaft von U . Da $(V_1 \setminus U) \cup N(U)$ eine Eckenüberdeckung von G ist und G ungemischt ist, muss gelten $\#[(V_1 \setminus U) \cup N(U)] \geq \#V_1$. Daraus folgt $\#N(U) \geq \#U$. Durch Anwendung des Heiratssatzes (Proposition 4.2.24) können wir im folgenden ohne Einschränkung annehmen, dass $\{x_i, y_i\} \in E$ gilt für $1 \leq i \leq n$.

Schritt 3: Sei Δ der simpliziale Komplex auf der Eckenmenge V , so dass gilt $I_\Delta = I(G)$. Gemäss Definition des Kantenideals müssen V_1 und V_2 Facetten von Δ sein. Weiterhin ist Δ nach Voraussetzung Cohen-Macaulay und damit wegen Lemma 4.2.23 zusammenhängend in Codimension 1. Folglich existiert eine Sequenz von Facetten $V_2 = F_0, F_1, \dots, F_{s-1}, F_s = V_1$

von Δ mit $\#(F_i \cap F_{i+1}) = n - 1$ für $0 \leq i \leq s - 1$. Da $\{x_l, y_l\} \in E$ gilt für alle $1 \leq l \leq n$ und damit alle Mengen der Form $\{x_l, y_l\}$ minimale Nicht-Seiten von Δ sind, existiert ein k , so dass $F_1 = (V_2 \setminus \{y_k\}) \cup \{x_k\}$. Sei, ohne Einschränkung, $F_1 = (V_2 \setminus \{y_n\}) \cup \{x_n\}$. Da Δ Cohen-Macaulay ist, gilt selbiges auch für $\text{lk}_\Delta(\{x_n\})$ (Lemma 4.2.22) und insbesondere ist $\text{lk}_\Delta(\{x_n\})$ zusammenhängend in Codimension 1. Da sowohl $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ als auch $\{y_1, \dots, y_{n-1}\}$ Facetten von $\text{lk}_\Delta(\{x_n\})$ sind, können wir daher mittels der selben Argumentation wie zuvor annehmen, dass $\{y_1, \dots, y_{n-2}, x_{n-1}\}$ eine Facette von $\text{lk}_\Delta(\{x_n\})$ ist. Somit ist $\{y_1, \dots, y_{n-2}, x_{n-1}, x_n\}$ Facette von Δ . Durch Iteration der geführten Argumentation können wir schließlich annehmen, dass

$$\{y_1, \dots, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n\}$$

für jedes $1 \leq i \leq n$ eine Facette von Δ ist. Daraus folgt dann, dass $\{x_i, y_j\} \notin E$ gilt für $j < i$. Dies bedeutet wiederum, dass für eine Kante $\{x_i, y_j\}$ in G gelten muss $j \geq i$.

Schritt 4: Wir zeigen, dass für $i < j < k$ und $\{x_i, y_j\}, \{x_j, y_k\} \in E$ gilt: $\{x_i, y_k\} \in E$.

Angenommen dies ist nicht der Fall, d.h. es existieren $i < j < k$ mit $\{x_i, y_j\}, \{x_j, y_k\} \in E$, aber $\{x_i, y_k\} \notin E$. Dann ist $\{x_i, y_k\}$ eine Seite von Δ . Da Δ rein ist und $\dim \Delta = n - 1$ gilt, muss eine Facette $F \in \Delta$ existieren mit $\#F = n$ und $\{x_i, y_k\} \subseteq F$. Insbesondere enthält F keine Kante von G . Da $\{x_i, y_j\}$ und $\{x_j, y_k\}$ beides Kanten von G sind, muss dann gelten $x_j, y_j \notin F$. Da jedoch $\#F = n$ gilt, muss dann ein $1 \leq l \leq n$ existieren, so dass $x_l \in F$ und $y_l \in F$ gilt. Da $\{x_l, y_l\}$ eine Kante von G ist, ergibt sich somit ein Widerspruch.

Schritt 5: Sei $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ eine endliche Menge. Wir definieren eine Relation $\leq_P$ auf P , indem wir setzen $p_i \leq_P p_j$, falls $\{x_i, y_j\} \in E$. Der 2., 3. und 4. Schritte zeigen, dass $\leq_P$ reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist. $\leq_P$ definiert also eine partielle Ordnung auf P . Per Konstruktion gilt außerdem $G(P) = G$. Damit folgt, dass G von einer Poset induziert wird. $\square$

4.3 Diracs Theorem über chordale Graphen

Im Mittelpunkt dieses Abschnitts steht das Theorem von Dirac über chordale Graphen. Neben diesem klassischen Theorem aus dem Jahr 1961 werden wir es unter algebraischen Gesichtspunkten betrachten. Als eines der Haupthilfsmittel wird hierbei wieder Alexander-Dualität zum Einsatz kommen. Zunächst benötigen wir wieder einige einführende Definitionen.

Definition 4.3.1. Sei $G = ([n], E)$ ein endlicher Graph. Sei $i_n, \dots, i_2, i_1$ eine Ordnung der Knoten von G mit der Eigenschaft, dass für jedes $1 < j \leq n$ die Menge $C_{i_j} = \{i_k \in [n] : 1 \leq k < j, \{i_k, i_j\} \in E\}$ eine Clique von G ist. Eine solche Ordnung der Knoten von G heißt *perfekte Eliminationsordnung*.

Das Theorem von Dirac ist nun das folgende.

Theorem 4.3.2 (Dirac). *Sei $G = ([n], E)$ ein endlicher Graph. Dann ist G genau dann chordal, wenn G eine perfekte Eliminationsordnung besitzt.*

Ziel wird es sein, das Theorem von Dirac zu beweisen. Der angegebene Beweis ist allerdings alles andere als direkt und wird uns insbesondere zusätzliche Charakterisierungen chordaler

Graphen liefern. Dazu werden wir äquivalente Bedingungen für die Existenz einer perfekten Eliminationsordnung entwickeln.

Definition 4.3.3. Sei Δ ein simplizialer Komplex.

- (i) Eine Facette F von Δ heißt *Blatt* von Δ , falls F die einzige Facette von Δ ist oder falls eine Facette $G \neq F$ von Δ existiert, so dass $H \cap F \subseteq G \cap F$ für jede Facette H von Δ . Wir nennen G einen *Ast* von F .
- (ii) Eine Ecke $i \in \Delta$, die in genau einer Facette von Δ enthalten ist, heißt *freie Ecke* von Δ .
- (iii) Δ ist ein sog. *simplizialer Wald*, falls eine Ordnung $F_1, \dots, F_m$ der Facetten von Δ existiert, so dass für jedes $2 \leq i \leq m$ F_i ein Blatt des Unterkomplexes $\langle F_1, \dots, F_i \rangle$ ist. Die gegebene Ordnung der Facetten wird als *Blatt-Ordnung* bezeichnet. Ist Δ ein zusammenhängender simplizialer Wald, so heißt Δ *simplizialer Baum*.

Das nächste Lemma gibt uns eine Möglichkeit zu prüfen, ob es sich bei einem gegebenen simplizialen Komplex um einen simplizialen Wald handelt.

Lemma 4.3.4. Sei Δ ein simplizialer Komplex. Sei $F_1, \dots, F_m$ eine Ordnung von Seiten von Δ , so dass für jedes $2 \leq i \leq m$ ein $j < i$ existiert, so dass $F_k \cap F_i \subseteq F_j \cap F_i$ für alle $k < i$. Ferner soll gelten $\Delta = \langle F_1, \dots, F_m \rangle$. Dann ist Δ ein simplizialer Wald.

Eine Menge von Seiten von Δ wie in obigem Lemma enthält stets die Facetten von Δ , möglicherweise aber auch noch zusätzliche Seiten.

Beweis. Wir beweisen die Aussage des Lemmas mittels Induktion über m . Ist $m = 1$, so ist Δ per Definition ein simplizialer Wald.

Sei nun $m \geq 2$. Wir können annehmen, dass für den Unterkomplex $\tilde{\Delta} = \langle F_1, \dots, F_{m-1} \rangle$ von Δ gilt $\Delta \neq \tilde{\Delta}$. Gemäß der Induktionsvoraussetzung ist $\tilde{\Delta}$ ein simplizialer Wald. Entsprechend existiert eine Blatt-Ordnung $G_1, \dots, G_r$ von $\tilde{\Delta}$, wobei $\mathcal{F}(\tilde{\Delta}) = \{G_1, \dots, G_r\} \subseteq \{F_1, \dots, F_{m-1}\}$. Nach Voraussetzung existiert ein $j_0 < m$ mit $F_k \cap F_m \subseteq F_{j_0} \cap F_m$ für alle $k < m$. Damit ist jede Ecke in $F_m \setminus F_{j_0}$ eine freie Ecke. Sei $F_{j_0} \subseteq G_s$. Gilt $G_s \subseteq F_m$, so ist $G_1, \dots, G_{s-1}, F_m, G_{s+1}, \dots, G_r$ eine Blattordnung von Δ . In der Tat ist jede Ecke in $F_m \setminus G_s$ eine freie Ecke und es gilt $G_s \cap G_i = F_m \cap G_i$ für alle i . Gilt hingegen $G_s \not\subseteq F_m$, so gilt $G_k \cap F_m \subseteq F_{j_0} \cap F_m = G_s \cap F_m$ für alle $k \leq r$. Folglich ist F_m ein Blatt von Δ und $G_1, \dots, G_r, F_m$ ist eine Blattordnung von Δ . $\square$

Mit Hilfe des vorigen Lemmas sind wir in der Lage eine erste notwendige als auch hinreichende Bedingung für die Existenz einer perfekten Eliminationsordnung zu beweisen.

Lemma 4.3.5. Ein endlicher Graph G hat genau dann eine perfekte Eliminationsordnung, falls der Cliques-Komplex $\Delta(G)$ von G ein simplizialer Wald ist.

Beweis. „ $\Rightarrow$ “: Sei G ein Graph mit Knotenmenge $[n]$ und Kantenmenge E . Nach Umnummerierung der Knotenmenge können wir annehmen, dass die Ordnung $n, n-1, \dots, 2, 1$ eine perfekte Eliminationsordnung von G ist. Per Definition ist dann für $1 \leq j \leq n$ die Menge $F_j = \{k \in [n] : 1 \leq k < j \text{ mit } \{k, j\} \in E\} \cup \{j\}$ eine Clique in G , d.h. $F_j \in \Delta(G)$ für alle $1 \leq j \leq n$. Wir werden zeigen, dass bereits $\Delta(G) = \langle F_2, \dots, F_n \rangle$ gilt. Sei dazu $F \in \Delta(G)$ und sei j maximal, so dass $j \in F$. Da F eine Clique von G ist, muss gelten $\{k, j\} \in E$ für alle $k \in F$ mit $k \neq j$. Dies zeigt, dass $F \subseteq F_j$ gilt und es gilt $\Delta(G) = \langle F_2, \dots, F_m \rangle$. Sei nun $1 < i \leq n$ und sei $j = \max(F_i \setminus \{i\})$. Es gilt dann $F_k \cap F_i \subseteq F_j \cap F_i$ für alle $k < i$. In der Tat, ist $a \in F_k \cap F_i$ und $a \neq j$, so gilt $a \leq k < i$ und $a \in F_i$. Es gilt also $a < j$ und $\{a, j\} \in E$. Somit $a \in F_j$. Es folgt nun aus Lemma 4.3.4, dass $\Delta(G)$ ein simplizialer Wald ist.

„ $\Leftarrow$ “: Wir nehmen an, dass $\Delta(G)$ ein simplizialer Wald mit Blattordnung $F_1, \dots, F_q$ ist. Insbesondere hat F_q eine freie Ecke und ohne Einschränkung sei dies n . Sei weiter $F'_q = F_q \setminus \{n\}$. Besitzt F_q noch eine weitere freie Ecke außer n , so ist $F_1, \dots, F_{q-1}, F'_q$ eine Blattordnung von $\Delta(G_{[n-1]})$. Insbesondere ist auch $\Delta(G_{[n-1]})$ ein simplizialer Wald. Per Induktion können wir annehmen, dass $G_{[n-1]}$ eine perfekte Eliminationsordnung besitzt und ohne Einschränkung sei $n-1, n-2, \dots, 2, 1$ eine solche. Es folgt dann, dass $n, n-1, \dots, 2, 1$ eine perfekte Eliminationsordnung von G ist. Ist hingegen n die einzige freie Ecke von F_q , so ist $F_1, F_2, \dots, F_{q-1}$ eine Blattordnung von $\Delta(G_{[n-1]})$ und die analoge Argumentation wie zuvor zeigt, dass G eine perfekte Eliminationsordnung besitzt. $\square$

Definition 4.3.6. Ein simplizialer Komplex Δ heißt *flag Komplex*, falls jede minimale Nicht-Seite von Δ aus genau zwei Elementen besteht.

Flag Komplexe haben oft recht schöne Eigenschaften, die das Arbeiten mit ihnen erleichtern. Außerdem gilt der folgende Zusammenhang.

Lemma 4.3.7. *Jeder simpliziale Wald ist ein flag Komplex.*

Beweis. Sei Δ ein simplizialer Wald auf der Eckenmenge $[n]$ mit Blattordnung $F_1, \dots, F_q$. Wir beweisen die Behauptung mittels Induktion über die Anzahl der Facetten q von Δ . Ist $q = 1$, so besitzt Δ keinerlei Nicht-Seiten und damit gilt insbesondere die Behauptung. Sei also $q \geq 2$. Da auch $\tilde{\Delta} = \langle F_1, \dots, F_{q-1} \rangle$ ein simplizialer Wald ist, folgt aus der Induktionsvoraussetzung, dass $\tilde{\Delta}$ ein flag Komplex ist. Sei F_i , wobei $i < q$ gilt, ein Ast von F_q . Es gilt dann

$$\tilde{\Delta} = \Delta_{[n] \setminus (F_q \setminus (F_q \cap F_i))}.$$

Angenommen es existiert eine minimale Nicht-Seite H von Δ mit $\#H \geq 3$. Zum einen muss H auch Nicht-Seite von $\tilde{\Delta}$ sein. Andererseits ist $\tilde{\Delta}$ aber flag und demnach muss $b \in F_q$ für ein $b \in H$ gelten. Da H Nicht-Seite von Δ ist, muss dann aber auch $a \notin F_q$ gelten für ein $a \in H$. Da H minimale Nicht-Seite von Δ ist, muss gelten $\{a, b\} \in \Delta$. Insbesondere existiert ein $j \neq q$ mit $\{a, b\} \subseteq F_j$. Somit $b \in F_j \cap F_q$ und nach Definition eines Astes gilt $b \in F_i$. Dies liefert $H \cap (F_q \setminus (F_q \cap F_i)) = \emptyset$. Dies zeigt, dass H auch schon minimale Nicht-Seite von $\tilde{\Delta}$ ist, was einen Widerspruch ergibt, da $\#H \geq 3$ gilt und $\tilde{\Delta}$ flag Komplex ist. $\square$

Das nächste Lemma gibt ein einfaches Kriterium dafür, dass ein simplizialer Komplex der Cliques-Komplex seines 1-Skeletts ist.

Lemma 4.3.8. *Sei $G = ([n], E)$ ein endlicher Graph und sei Γ ein simplizialer Komplex auf der Eckenmenge $[n]$, so dass G das 1-Skelett von Γ ist. Dann gilt $\Gamma = \Delta(G)$ genau dann wenn Γ ein flag Komplex ist.*

Beweis. Sei Γ ein simplizialer Komplex auf der Eckenmenge $[n]$, dessen 1-Skelett gerade der Graph G ist. Ist $F \in \Gamma$ eine Seite, so ist F eine Clique in G . Es gilt also $\Gamma \subseteq \Delta(G)$. Weiter gilt $\mathcal{N}(\Gamma) \cap \binom{[n]}{2} = E(\overline{G})$, d.h. die minimalen Nicht-Seiten von Γ der Kardinalität 2 sind gerade die Kanten des komplementären Graphes von G . Wegen $\mathcal{N}(\Delta(G)) = E(\overline{G})$ folgt weiter, dass genau dann $\Gamma = \Delta(G)$ gilt, falls $\mathcal{N}(\Gamma) \subseteq \binom{[n]}{2}$ gilt, was genau dann der Fall ist, wenn Γ ein flag Komplex ist. $\square$

Wir können nun eine weitere Charakterisierung chordaler Graphen angeben.

Korollar 4.3.9. *Sei $G = ([n], E)$ ein endlicher Graph. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (i) G hat eine perfekte Eliminationsordnung.
- (ii) $\Delta(G)$ ist ein simplizialer Wald.
- (iii) G ist das 1-Skelett eines simplizialen Waldes.

Beweis. (i) $\Leftrightarrow$ (ii): Wegen Lemma 4.3.5 hat G genau dann eine perfekte Eliminationsordnung wenn der Cliques-Komplex $\Delta(G)$ ein simplizialer Wald ist.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): Da G das 1-Skelett von $\Delta(G)$ ist, ist G insbesondere das 1-Skelett eines simplizialen Waldes, falls $\Delta(G)$ ein solcher ist.

Ist umgekehrt G das 1-Skelett eines simplizialen Waldes Γ , so folgt aus Lemma 4.3.7, dass Γ flag ist. Lemma 4.3.8 impliziert, dass $\Gamma = \Delta(G)$ gilt. Damit ist $\Delta(G)$ ein simplizialer Wald. $\square$

Wir geben noch ein weiteres Kriterium an dafür, dass ein simplizialer Komplex ein simplizialer Wald ist. Der Beweis für dieses Kriterium beruht auf dem Satz von Hilbert-Burch sowie dem vorhergehenden Korollar. Da der Beweis des Satzes von Hilbert-Burch jedoch recht aufwändig ist und einige Grundlagen benötigt, die wir nicht zur Verfügung haben, verzichten wir auf den Beweis.

Korollar 4.3.10. *Sei Δ ein simplizialer Komplex auf der Eckenmenge $[n]$. Sei Δ^* das Alexander-Dual von Δ . Dann ist Δ genau dann ein simplizialer Wald, wenn $\text{proj dim}(I_{\Delta^*}) = 1$ gilt.*

Wir können nun die vollständige Charakterisierung chordaler Graphen angeben. Einige der Charakterisierungen hatten wir bereits, andere wiederum ergeben sich direkt mittels Alexander-Dualität.

Theorem 4.3.11. *Sei $G = ([n], E)$ ein endlicher Graph auf der Eckenmenge $[n]$ und mit $E \neq \binom{[n]}{2}$. Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent:*

- (i) G ist chordal.
- (ii) $I_{\Delta(G)}$ hat eine lineare Auflösung.
- (iii) $\text{reg}(I_{\Delta(G)}) = 2$
- (iv) $\text{proj dim}(I_{\Delta(G)}^*) = 1$
- (v) $\Delta(G)$ ist ein simplizialer Wald.
- (vi) G ist 1-Skelett eines simplizialen Waldes.
- (vii) G hat eine perfekte Eliminationsordnung.

Der Beweis des obigen Theorems ist nun, da wir schon die meisten Grundlagen gelegt haben, sehr kurz.

Beweis. „(i) $\Leftrightarrow$ (ii)“: Da $I(\overline{G}) = I_{\Delta(G)}$ besagt Theorem 4.2.11, dass G genau dann chordal ist, wenn $I_{\Delta(G)}$ eine lineare Auflösung hat.
 „(ii) $\Leftrightarrow$ (iii)“: Da $\Delta(G)$ ein flag Komplex ist, wird $I_{\Delta(G)}$ von Monomen vom Grad 2 erzeugt. Damit ist die Auflösung von $I_{\Delta(G)}$ genau dann linear, wenn $\text{reg}(I_{\Delta(G)}) = 2$ gilt.
 „(iii) $\Leftrightarrow$ (iv)“: Wegen des Theorems von Terai (Theorem 4.1.16) gilt

$$\text{reg}(I_{\Delta(G)}) = \text{proj dim}(I_{\Delta(G)}^*) + 1.$$

Damit gilt $\text{reg}(I_{\Delta(G)}) = 2$ genau dann wenn $\text{proj dim}(I_{\Delta(G)}^*) = 1$.

„(iv) $\Leftrightarrow$ (v)“: Gemäß Korollar 4.3.10 gilt $\text{proj dim}(I_{\Delta(G)}^*) = 1$ genau dann wenn $\Delta(G)$ ein simplizialer Wald ist.
 „(v) $\Leftrightarrow$ (vi)“: Gemäß Korollar 4.3.9 ist $\Delta(G)$ genau dann ein simplizialer Wald wenn G das 1-Skelett eines simplizialen Waldes ist.
 „(vi) $\Leftrightarrow$ (vii)“: Gemäß Korollar 4.3.9 ist G genau dann das 1-Skelett eines simplizialen Waldes, wenn G eine perfekte Eliminationsordnung hat. $\square$

Der Beweis der vorangehenden Theorems liefert außerdem den Beweis des klassischen Theorems von Dirac.