Elementarmathematik II
für L2/L5-Lehramtstudierende

Dr. André Kappes

9. Juli 2015

Einleitung

Dieses Skript entsteht parallel zu der Vorlesung Elementarmathematik II für Studierende der Lehramtsstudiengänge L2 und L5. Für Hinweise auf Fehler oder Ungenauigkeiten bin ich dankbar. Diese können mir gerne unter

`kappes@math.uni-frankfurt.de`

mitgeteilt werden.

Im Folgenden finden Sie einen Überblick über mögliche weiterführende Literatur. Die Vorlesung orientiert sich im Groben an den Skripten von Jürgen Wolfart und Joachim Weidmann. Die anderen vier angegebenen Bücher sind "Klassiker" zur Analysis 1, wobei das Buch von Richard Courant und Fritz John die englische Übersetzung und Erweiterung des Buchs von Courant ist.

Literatur

[Wol] *Wolfart J.*, Skript zur Elementarmathematik II, Sommersemester 2013

[Wei] *Weidmann J.*, Skript zur Elementarmathematik II, Sommersemester 2006

[Cou] *Courant, R.*, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, Band 1, Springer-Verlag

[CJ] *Courant, R., John, F.*, Introduction to Calculus and Analysis 1, Springer-Verlag

[For] *Forster, O.*, Analysis 1, Vieweg-Teubner

[Wal] *Walter, W.*, Analysis 1, Springer-Verlag

[Ebb] *Ebbinghaus, H.-D.*, Zahlen, Springer-Verlag

Inhaltsverzeichnis

1 Die reellen Zahlen: Dezimalbrüche, Konvergenz und Vollständigkeit

1.1 Vorbemerkungen

In der Schule bzw. der Vorlesung Elementarmathematik I haben Sie schon die natürlichen Zahlen

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \{1, 2, 3, \ldots\} && \text{die Menge der natürlichen Zahlen} \\ \mathbb{N}_0 &= \mathbb{N} \cup \{0\} \end{aligned}$$

kennengelernt.

Abzählen. Mit den natürlichen Zahlen können wir die Größe eine Menge bestimmen. Wir sagen, eine Menge M habe n Elemente, wenn wir M in der Form

$$M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

schreiben können. Formaler fassen können wir dies mit folgender Definition. Zur Erinnerung: Eine Abbildung $f : M \to N$, $m \mapsto f(m) = n$ ist eine Vorschrift, die jedem Element $m \in M$ ein *eindeutiges* Element $f(m) = n$ zuordnet.

Definition 1.1 *Seien M, N zwei Mengen und $f : M \to N$ eine Abbildung.*

a) f heißt injektiv, wenn für alle $x, y \in M$ gilt: Aus $f(x) = f(y)$ folgt $x = y$.

b) f heißt surjektiv, wenn für das Bild $f(M) := \big\{f(m) \mid m \in M\big\}$ gilt: $f(M) = N$.

c) f heißt bijektiv, wenn f injektiv und surjektiv ist.

Damit gilt: M hat n Elemente, wenn eine bijektive Abbildung $f : \{1, \ldots, n\} \to M$ existiert. Die leere Menge hat per Definition 0 Elemente.
Allgemeiner heißt M *endlich*, wenn es ein $n \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass M n Elemente hat. Sonst heißt M *unendlich*. Eine Menge M heißt *abzählbar unendlich*, wenn wir M in der Form

$$M = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$$

schreiben können, oder anders: wenn es eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to M$ gibt. Falls M weder endlich noch abzählbar unendlich ist, heißt M *überabzählbar*. Gibt es überabzählbare Mengen? Wir werden diese Frage später beantworten.

Rechnen. Natürliche Zahlen können wir addieren und multiplizieren. Allerdings sind z.B. die Gleichungen

$$a + x = b \quad \text{bzw.} \quad a \cdot x = b \qquad (a, b \in \mathbb{N})$$

nicht immer in $\mathbb{N}$ lösbar. Zur Lösung der ersten müssen wir den Zahlbereich zur

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} \qquad \text{der Menge der ganzen Zahlen,}$$

erweitern und um auch die zweite lösen zu können

$$\mathbb{Q} = \left\{\tfrac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q > 0\right\} \qquad \text{die Menge der rationalen Zahlen}$$

einführen.
Allerdings stößt man schon bei der Gleichung

$$x^2 - 2 = 0$$

auf das Problem, dass die Lösung keinesfalls rational sein kann. Insbesondere ist die Länge der Diagonalen in einem Quadrat mit Seitenlänge 1 nicht rational. Das gleiche Problem entsteht, wenn man den Flächeninhalt eines Kreises mit Radius 1, also π bestimmen möchte.
Stellt man sich alle Zahlen auf dem Zahlenstrahl, d.h. als Punkte einer Geraden vor, so bilden die rationalen Zahlen anschaulich nur eine echte Teilmenge aller möglichen Zahlen. Das erste Ziel der Vorlesung ist, diese Anschauung zu präzisieren und den "Zahlbereich" zu erweitern, indem wir die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ einführen. Mit deren Hilfe kann man dann wirklich alle möglichen "in der Natur vorkommenden" Abstände, Flächeninhalte, etc. messen kann.

1.2 Folgen und Konvergenz

Eine Möglichkeit, die reellen Zahlen einzuführen, liegt in der Dezimalbruchentwicklung. Man könnte also die Menge der reellen Zahlen definieren als Menge aller (endlichen und unendlichen) Dezimalbrüche

$$\pm a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots = \pm(a_0 + \tfrac{a_1}{10} + \tfrac{a_2}{100} + \tfrac{a_3}{1000} + \ldots)$$

mit $a_0 \in \mathbb{N}_0$ und $a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, $i \in \mathbb{N}$.
Was ist aber z.B. mit einem Ausdruck der Form

$$S = 0,999\ldots$$

überhaupt gemeint? Zunächst ist in $\mathbb{Q}$ nur die Summe von *endlich vielen* rationalen Zahlen wieder eine rationale Zahl. Wir können also die endlichen *Partialsummen*

$$S_n = 0,\underbrace{99\ldots9}_{n\text{-mal}} = \tfrac{9}{10} + \tfrac{9}{10^2} + \ldots + \tfrac{9}{10^n} = \sum_{k=1}^{n} \tfrac{9}{10^k}$$

bilden. Anschaulich sollte die Zahl S also diejenige sein, gegen die die Folge der Zahlen S_n strebt, wenn n beliebig groß wird. Diese Anschauung formalisieren wir in einer Definition, die uns gleichzeitig erlaubt, zu testen, was der *Grenzwert* S sein soll. Dazu benötigen wir noch zwei Vorbereitungen.

Ordnung. Zwei rationale Zahlen x, y kann man in natürlicher Weise vergleichen: Es gilt $x < y$, falls x auf dem Zahlenstrahl links von y liegt. Analog definiert man $x \leq y$ durch: $x < y$ oder $x = y$ und die Symbole $\geq$ und $>$.
Diese Definition kann man natürlich noch formaler ausdrücken: Seien $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{c}{d}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $b, d > 0$. Dann schreibt man $x < y$ folgendermaßen um:

$$\tfrac{a}{b} < \tfrac{c}{d} \quad \Leftrightarrow \quad ad < bc \quad \Leftrightarrow 0 < bc - ad$$

indem man die unten stehenden Rechenregeln c) und b) benutzt. Von der *ganze Zahl* $bc - ad$ ist klar, wann sie positiv sein soll, nämlich genau dann wenn $bc - ad \in \mathbb{N}$ gilt.

Bemerkung 1.2 Es seien $x, y, z \in \mathbb{K}$, wobei $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, bzw. später auch $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sei. Dann gilt:

a) Genau eine der drei Alternativen ist wahr: $x > 0$ oder $x = 0$ oder $x < 0$.

b) Aus $x < y$ folgt $x + z < y + z$.

c) Aus $x < y$ folgt
$$\begin{cases} xz < yz, & \text{falls } z > 0, \\ xz > yz, & \text{falls } z < 0. \end{cases}$$

d) Sei $x > 0$. Es gilt
$$\begin{cases} x < xz, & \text{falls } z > 1, \\ x > xz, & \text{falls } z < 1. \end{cases}$$

e) Seien $0 < x < y$. Dann ist $0 < y^{-1} < x^{-1}$.

Notation 1.3 *Seien $a, b \in \mathbb{K}$, wobei $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, bzw. später auch $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sei. Dann schreiben wir*

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{x \in \mathbb{K} \mid a \leq x \leq b\} && \textit{für das abgeschlossene Intervall} \\ (a, b) &= \{x \in \mathbb{K} \mid a < x < b\} && \textit{für das offene Intervall} \end{aligned}$$

und für die halboffenen Intervalle

$$\begin{aligned} [a, b) &= \{x \in \mathbb{K} \mid a \leq x < b\} \\ (a, b] &= \{x \in \mathbb{K} \mid a < x \leq b\} \end{aligned}$$

Absolutbetrag. Für $x \in \mathbb{Q}$ (später auch für $x \in \mathbb{R}$) definieren wir den Betrag von x durch

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$$

Identifiziert man $\mathbb{Q}$ (bzw. $\mathbb{R}$) mit Punkten auf dem Zahlenstrahl, so gibt der Betrag $|x|$ den Abstand von x zu 0 an. Allgemeiner ist $|x-a|$ der Abstand von x zu a. So ist z.B. für $\varepsilon > 0$

$$\{x \in \mathbb{Q} \mid |x-a| < \varepsilon\} = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$$

die Menge aller Zahlen, die von a weniger als ε entfernt liegen.

Bemerkung 1.4 Es seien $a, b \in \mathbb{K}$, wobei $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, bzw. später auch $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sei. Der Absolutbetrag genügt den folgenden Rechenregeln:

a) $|ab| = |a| \cdot |b|$ (Multiplikativität)

b) $|a+b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung)

c) $|a-b| \geq \big||a| - |b|\big|$ (umgekehrte Dreiecksungleichung)

Beweis: Für a) und b) führt man eine Fallunterscheidung nach dem Vorzeichen durch. Teil c) folgt aus b) folgendermaßen:

$$|a| = |a-b+b| \leq |a-b| + |b|$$

und damit $|a| - |b| \leq |a-b|$. Führt man diesen Trick mit vertauschten Rollen von a und b durch, erhält man $|b| - |a| \leq |b-a| = |a-b|$ und damit insgesamt c), denn eine Ungleichung $|x| \leq M$ ist äquivalent zu: $x \leq M$ und $-x \leq M$. ■

Damit können wir die folgende Definition geben, die im Grunde auf Cauchy[1] zurückgeht.

Definition 1.5 *Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, bzw. später auch $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (mit $a_n \in \mathbb{K}$) konvergiert gegen den Grenzwert $a \in \mathbb{K}$, falls für jedes (beliebig kleine) $\varepsilon > 0$ ein (von ε abhängiges großes) $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq N$ gilt:*

$$|a_n - a| < \varepsilon\,.$$

In diesem Fall schreiben wir: $a_n \to a$ $(n \to \infty)$ oder $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Gibt es kein a, so dass $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ gilt, so nennen wir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

Notation 1.6 *Kurz schreibt man oft $\forall$ anstelle von "für alle" und $\exists$ anstelle von "es gibt". Außerdem schreibt man kurz für "daraus folgt" auch $\Rightarrow$ und für "genau dann, wenn" auch $\Leftrightarrow$. In dieser Notation lautet obige Definition:*

$$a_n \to a \ (n \to \infty) \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall\, \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon\,.$$

Allerdings ist diese Notation oft schwerer zu lesen.

[1] Augustin-Louis Cauchy, 1789–1857

Zurück zu unserem Beispiel. Die Vermutung liegt nahe, dass in diesem Fall S_n konvergiert und zwar gegen den Grenzwert $S = 1$. Um dies zu überprüfen, geben wir uns ein $\varepsilon > 0$ vor. Wir müssen dazu nun ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ finden, so dass für alle $n \geq N$ der Abstand

$$|S_n - 1| < \varepsilon$$

ist. Nun gilt $|S_n - 1| = \frac{1}{10^n}$. Ab welchem $N \in \mathbb{N}$ wird dies kleiner als unser vorgegebenes ε? Hier hilft uns die auch sonst nützliche *Bernoulli-Ungleichung*[2].

Proposition 1.7 (Bernoulli-Ungleichung) *Für $h \geq -1$, $h \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ gilt*

$$(1 + h)^n > 1 + nh. \tag{1.1}$$

Beweis (von Proposition 1.7): Wir beweisen die Ungleichung per Induktion. Für $n = 2$ ist $(1 + h)^2 = 1 + 2h + h^2 > 1 + 2h$, da $h^2 > 0$. Für den Induktionsschritt nehmen wir an, dass $(1+h)^n > 1+nh$ für ein $n \geq 2$ gelte. Zu zeigen ist $(1+h)^{n+1} > 1 + (n + 1)h$. Nun gilt, da $(1 + h) \geq 0$ ist,

$$(1+h)^{n+1} = (1+h)^n \cdot (1+h) \overset{\text{I.V.}}{\geq} (1+nh)(1+h) = 1+(n+1)h+nh^2 > 1+(n+1)h,$$

wobei wir im letzten Schritt $nh^2 > 0$ verwendet haben. ∎

Damit folgt in unserem Beispiel mit $h = 9$, dass $10^n > 1 + 9n$, und damit

$$|S_n - 1| = 10^{-n} < (1 + 9n)^{-1} < \varepsilon$$

für $n \geq N > \frac{1}{9}(\varepsilon^{-1} - 1)$. Wir haben also gezeigt, dass $S_n \to 1$ $(n \to \infty)$ gilt. Gleichzeitig stehen wir vor dem Problem, dass die Zahl 1 nun zwei verschiedene Darstellungen, nämlich

$$1 = 1,000\ldots = 0,999\ldots$$

als unendlicher Dezimalbruch hat. Ein zweites Problem bei der Identifikation von $\mathbb{R}$ mit der Menge der Dezimalbrüche ist, dass sich die Rechenoperationen $+$ und $\cdot$ nur schwierig auf unendliche Dezimalbrüche fortsetzen lassen. Eine mögliche Lösung besteht darin, allgemeinere Folgen statt die der endlichen Dezimalbrüche zuzulassen und diesen einen Grenzwert zuzuschreiben. Bevor wir diesen Weg weiter verfolgen, wollen wir noch einige Beispiele konvergenter und divergenter Folgen diskutieren.

Beispiel 1.8 1) Die konstante Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a, a, a, \ldots)$ ist konvergent und hat den Grenzwert a.

2) Sei $a_n = \frac{1}{n}$. Dann gilt $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$, denn $|\frac{1}{n}| < \varepsilon$ für $n \geq N \geq \varepsilon^{-1}$. Allgemeiner heißen Folgen, die gegen 0 konvergieren, *Nullfolgen*.

---

[2] Jakob Bernoulli, 1655–1705

3) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und (n_k) eine Folge von natürlichen Zahlen mit
$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k < n_{k+1} < \ldots$$
Dann konvergiert auch die *Teilfolge* $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, und zwar gegen denselben Grenzwert a. Zum Beispiel ist $a_{n_k} = \frac{1}{2^k}$ eine Teilfolge von $a_n = \frac{1}{n}$ und dementsprechend ebenfalls eine Nullfolge.

4) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $a_n = (-1)^n$. Dann ist a_n divergent, denn angenommen, es gäbe $a \in \mathbb{Q}$ mit $a_n \to a$ $(n \to \infty)$. Dann gäbe es für $\varepsilon = 1$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$
$$|a_n - a| < \varepsilon = 1$$
wäre. Nun wäre aber für $n \geq N$
$$2 = |a_n - a_{n+1}| = |a_n - a + (a - a_{n+1})| \leq |a_n - a| + |a_{n+1} - a| < 1 + 1 = 2,$$
ein Widerspruch.

5) Sei
$$a_n = n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1.$$
Dann divergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Genauer gilt: für jedes $M > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt: $a_n \geq M$. Man nehme dazu $N = M$. Für divergente Folgen mit dieser Eigenschaft schreibt man oft auch $a_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ und sagt, dass a_n gegen unendlich divergiert. Entsprechend definiert man Divergenz gegen $-\infty$. 1: 13.04.2015

6) Sei $q \in \mathbb{Q}$ (bzw. später $q \in \mathbb{R}$) und $a_n = q^n$. Dann ist a_n konvergent, genau dann wenn $-1 < q \leq 1$ gilt, und
$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 1, & q = 1 \\ 0, & |q| < 1 \end{cases}.$$
Für $q = 1$ ist dies klar. Für $|q| < 1$ lässt sich $|q|^{-1} = 1 + h$ mit $h > 1$ schreiben. Damit gilt nach Proposition 1.7 für $n \geq 2$
$$|q^n| = |q|^n = (1+h)^{-n} < (1+nh)^{-1}.$$
Der letzte Ausdruck wird für große n kleiner als jedes vorgegebene ε, und damit konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0. Genauso sieht man, dass für $q > 1$, der Ausdruck q^n größer als jede vorgegeben Schranke $M > 0$ wird, wenn $n \to \infty$. Schließlich divergiert auch q^n für $q \leq -1$. Für $q = -1$ erhält man Beispiel 4), und für $q < -1$ gilt: Würde die Folge konvergieren, so auch die Folge der Beträge $(|q|^n)_{n\in\mathbb{N}}$, und wir erhalten eine Widerspruch.

Definition 1.9 *Ist $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge und die Folge $S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ konvergent, so heißt ihr Grenzwert* $\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ unendliche Reihe *und S_n heißt n-te Partialsumme.*

Mehr zur Konvergenz von Reihen findet man in Abschnitt 1.6. Ein erstes wichtiges Beispiel wollen wir aber schon jetzt diskutieren.

Proposition 1.10 (Geometrische Reihe) *Wenn* $|q| < 1$ *gilt, dann konvergiert* $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$ *und in diesem Fall ist*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}.$$

BEWEIS: Es gilt

$$(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k - q^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=1}^{n+1} q^k = 1 - q^{n+1}.$$

Damit folgt

$$|S_n - \frac{1}{1-q}| = |\frac{1-q^{n+1}}{1-q} - \frac{1}{1-q}| = \frac{|q|^{n+1}}{|1-q|}.$$

Wegen $|q| < 1$ und Beispiel 1.8 (5) gibt es zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ so dass letzterer Ausdruck für $n \geq N$ kleiner als ε wird. Damit folgt die Behauptung. ∎

Um Grenzwerte von Folgen aus bereits bekannten Grenzwerten zu berechnen, sind folgende Regeln nützlich.

Proposition 1.11 *Seien* (a_n), (b_n) *konvergente Folgen und* $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, $b = \lim_{n\to\infty} b_n$. *Dann gilt*

a) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$ *und* $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.
Insbesondere gilt für $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}$

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda a + \mu b.$$

b) Falls $b \neq 0$, *gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

c) Ist $a_n \leq b_n$ *für alle bis auf endlich viele* $n \in \mathbb{N}$, *so gilt* $a \leq b$.

Im letzten Fall kann $\leq$ nicht durch $<$ ersetzt werden, wie das Beispiel $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0, 0, 0, \ldots)$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ zeigt.
Für den Beweis benötigen wir noch eine Hilfsaussage.

Definition 1.12 *Eine Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *heißt* beschränkt, *falls es ein* $M > 0$ *gibt, so dass* $|a_n| < M$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt.*

Lemma 1.13 *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

BEWEIS: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge und $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Zu $\varepsilon = 1$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < 1$ für alle $n \geq N$. Damit liegt für $n \geq N$ das Folgenglied a_n im Intervall $[a-1, a+1]$. Wir wählen nun M so groß, dass $[-M, M] \supset [a-1, a+1]$ gilt und dass die endlich vielen Folgenglieder $a_1, \ldots, a_{N-1}$ ebenfalls in $[-M, M]$ liegen. ■

BEWEIS: a) Die erste Aussage folgt direkt aus der Dreiecksungleichung. Die zweite erhält man mit der Umformung

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \leq |b_n||a_n - a| + |a||b_n - b|.$$

Nun gilt nach Lemma 1.13, dass $|b_n| \leq M$ für eine Konstante $M > 0$ ist. Durch eventuelles Vergrößern von M können wir auch $|a| \leq M$ erreichen. Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir setzten $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2M}$. Dann existiert aufgrund der Konvergenz von (a_n) und (b_n) ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt:

$$|a_n - a| < \varepsilon' \quad \text{und} \quad |b_n - b| < \varepsilon'.$$

Damit folgt für alle $n \geq N$

$$|a_n b_n - ab| \leq |b_n||a_n - a| + |a||b_n - b| < M \cdot \varepsilon' + M \cdot \varepsilon' = \varepsilon.$$

b) Wegen $b \neq 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $b_n \neq 0$ für alle $n \geq N$ und die endlich vielen Folgenglieder b_i, $i < N$ darf man auf 1 setzen ohne die Konvergenz zu ändern. Dann folgt b) aus a), indem man für $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge $(b_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ einsetzt.

c) Wegen a) reicht es zu zeigen, dass aus $a_n \geq 0$ für $n \geq N$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ folgt: $a \geq 0$. Angenommen, $a < 0$. Sei $\varepsilon = |a|/2$. Dann gibt es ein $N_1 \geq N$, so dass für alle $n \geq N_1$ gilt $|a - a_n| < \varepsilon = \frac{|a|}{2}$. Somit liegt a_n im Intervall $(a - |a|/2, a + |a|/2)$, also gilt insbesondere $a_n < -|a|/2 < 0$ im Widerspruch zu $a_n \geq 0$. ■

1.3 Dezimalbrüche

Wir kehren nochmal zu den Dezimalbrüchen zurück und möchten feststellen, wann eine Dezimalbruchfolge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$S_n = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^{-k}$$

$a_0 \in \mathbb{N}_0$, $a_i \in \{0, \ldots, 9\}$ einen Grenzwert in $\mathbb{Q}$ hat. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf positive Dezimalbrüche.

Lemma 1.14 *Sei $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Dezimalbruchfolge mit Grenzwert $S = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $S > 0$. Falls $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht die Periode $\overline{9}$ hat, ist $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch S eindeutig bestimmt und gleich dem Ergebnis der formalen Division von p durch q.*

Beweis: Für das n-te Folgenglied gilt stets $S_n \leq S_m \leq S_n + 10^{-n} - 10^{-m}$ für alle $m \geq n$ und damit auch nach Grenzübergang $m \to \infty$

$$S_n \leq S \leq S_n + 10^{-n}.$$

Da (S_n) nicht auf die Periode $\overline{9}$ endet, gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ein $\varepsilon > 0$, so dass sogar $S_n \leq S \leq S_n + 10^{-n} - \varepsilon$, also insbesondere $S_n \leq S < S_n + 10^{-n}$ gilt.
Für $n = 0$ ist $S_n = a_0$ die eindeutige ganze Zahl mit $a_0 \leq \frac{p}{q} < a_0 + 1$. Multipliziert man dies mit q, erhält man

$$p = a_0 q + r_0, \quad \text{mit einem } 0 \leq r_0 \leq q - 1.$$

Für $n = 1$ ist a_1 die eindeutige Zahl in $\{0, \ldots, 9\}$, so dass $a_0 + \frac{a_1}{10} \leq \frac{p}{q} < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10}$. Multipliziert man dies mit $10q$ und setzt die Gleichung für p ein, so ergibt sich

$$10 r_0 = a_1 q + r_1, \quad \text{mit einem } 0 \leq r_1 \leq q - 1.$$

Für $n = 2$ ist a_2 die eindeutige Zahl in $\{0, \ldots, 9\}$ mit $a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} \leq \frac{p}{q} < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{1}{10^2}$. Multiplikation mit $10^2 q$ und Einsetzen der ersten beiden Gleichungen liefert

$$10 r_1 = a_2 q + r_2, \quad \text{mit einem } 0 \leq r_2 \leq q - 1.$$

In dieser Weise fährt man fort. Die sich ergebenden Gleichungen für a_i und r_i sind genau die, die man bei der formalen Division von p durch q erhält. ∎

Satz 1.15 *Eine Dezimalbruchfolge konvergiert genau dann gegen eine rationale Zahl, falls sie periodisch oder endlich ist.*

Beweis: Es sei $S_n = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$ eine positive Dezimalbruchfolge. Falls die Folge endlich ist, d.h. $a_n = 0$ für alle $n \geq N$, dann ist $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bis auf endlich viele Terme gleich einer konstanten Folge, also konvergent und der Grenzwert ist rational.
Falls (S_n) periodisch ist, also von der Form

$$S_n = a_0, a_1 \ldots a_k b_1 \ldots b_\ell b_1 \ldots b_\ell \ldots$$

so ist der Grenzwert gegeben durch

$$S = \tfrac{a_0 a_1 \ldots a_k}{10^k} + 10^{-(k+\ell)} b_1 \ldots b_\ell \lim_{m \to \infty} \sum_{j=0}^{m} (10^{-\ell})^j,$$

also im Wesentlichen eine geometrische Reihe. Mit Proposition 1.10 folgt

$$S = \tfrac{a_0 a_1 \ldots a_k}{10^k} + 10^{-(k+\ell)} b_1 \ldots b_\ell \cdot \tfrac{1}{1 - 10^{-\ell}}.$$

Damit konvergiert $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen eine rationale Zahl.
Nun sei umgekehrt $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent mit rationalem Grenzwert $S = \frac{p}{q}$. Nach Lemma 1.14 hat (S_n) entweder die Periode $\overline{9}$ oder die a_i entstehen durch formale Division von p durch q. Im letzteren Fall gibt es q Möglichkeiten für den Rest r_i, und sobald sich ein Rest wiederholt, wird die Folge der a_i periodisch – falls $r_i = 0$ gilt, bricht sie sogar ab. Insbesondere ist die maximale Länge der Periode höchstens $q - 1$. ∎

1.4 Cauchyfolgen und der Körper der reellen Zahlen

Satz 1.15 zeigt insbesondere, dass alle nichtperiodischen Dezimalbruchfolgen nicht gegen eine rationale Zahl konvergieren. Um ihnen dennoch einen Grenzwert zuschreiben zu können, müssen wir die rationalen zu den reellen Zahlen erweitern, was jetzt geschehen soll. Die entscheidende Idee ist die Beobachtung, dass der Abstand zweier Folgenglieder S_n, S_m für n, m genügend groß beliebig klein wird. Das motiviert die folgende Definition.

Definition 1.16 *Eine Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *heißt* Cauchy-Folge*, wenn für jedes* $\varepsilon > 0$ *ein* $N \in \mathbb{N}$ *existiert, so dass für alle* $n \geq N$*,* $m \geq N$ *gilt*

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

2:20.04.2015

Bemerkung 1.17 Jede konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge. Denn sei $\varepsilon > 0$. Da (a_n) konvergiert existiert zu $\varepsilon' = \varepsilon/2$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n > N$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon'$. Seien nun $n, m > N$. Dann gilt also

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \varepsilon' + \varepsilon' = \varepsilon,$$

was zu zeigen war.

In $\mathbb{R}$ soll nun jede Cauchyfolge einen Grenzwert haben. Um die reellen Zahlen zu konstruieren, ist die Idee, sich quasi mit dem Schopf aus dem Sumpf zu ziehen und die Menge aller rationalen Cauchyfolgen selbst zu betrachten. Es sei also

$$F = \big\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (a_n)_{n\in} \text{ ist eine Cauchyfolge von rationalen Zahlen}\big\}$$

die Menge aller rationalen Cauchyfolgen. Für zwei Cauchyfolgen $a = (a_n)$, $b = (b_n) \in F$ ist die Summe

$$a + b := (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } c_n = a_n + b_n$$

und das Produkt

$$a \cdot b := (d_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } d_n = a_n \cdot b_n$$

wieder eine Cauchyfolge, wie man nachrechnet[3]. Diese Addition und Multiplikation machen F zu einem kommutativen *Ring*, d.h. F mit der Addition ist eine kommutative Gruppe, die Multiplikation ist assoziativ und kommutativ mit der konstanten Folge $1 = (1, 1, 1, \ldots)$ als neutralem Element und es gelten die Distributivgesetze. Desweiteren können wir $\mathbb{Q}$ als Teilmenge von F auffassen, indem wir $x \in \mathbb{Q}$ mit der konstanten Cauchyfolge $(x, x, x, \ldots)$ identifizieren, und die gewöhnliche Addition und Multiplikation auf $\mathbb{Q}$ wird unter dieser Identifikation zu der auf F definierten. Damit haben wir einen ersten Kandidaten für die reellen Zahlen. Allerdings ist der Ring F noch kein *Körper*, d.h. nicht jedes Element $a \neq 0$ hat ein multiplikatives

[3] Für die Addition ergibt sich dies einfach aus der Dreiecksungleichung, für die Multiplikation muss man erst zeigen, dass Cauchyfolgen beschränkt sind – der Beweis dafür folgt dem von Lemma 1.13. Dann kann man wie im Beweis von Proposition 1.11 argumentieren.

Inverses, also ein Element b so dass $a \cdot b = 1 = (1, 1, 1, \ldots)$ gilt. Das Problem liegt in den Nullfolgen, denn zu $a = (\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ müsste das multiplikative Inverse $b = (n)_{n \in \mathbb{N}}$ sein – dies ist aber keine Cauchyfolge.
Die Lösung besteht darin, eine geeignete Äquivalenzrelation auf F zu betrachten und dann zu der Menge der Äquivalenzklassen überzugehen. Es sei

$$N = \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F \mid \lim_{n \to \infty} a_n = 0 \right\}$$

die Teilmenge der Nullfolgen. Zwei Cauchyfolgen $a = (a_n)$, $b = (b_n)$ nennen wir äquivalent, falls ihre Differenz eine Nullfolge ist, d.h.

$$(a_n - b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in N.$$

und schreiben $a \sim b$ in diesem Fall. Zu $a \in F$ sei $[a] = \left\{ b \in F \mid a \sim b \right\}$ die *Äquivalenzklasse von a*, die Menge aller zu a äquivalenten Cauchyfolgen. Es gilt $[a] = a + N = \left\{ a + b \mid b \in N \right\}$. Desweiteren sind zwei Äquivalenzklassen entweder disjunkt oder gleich. Wir betrachten nun die Menge

$$F/N = \left\{ [a] \mid a \in F \right\}$$

der Äquivalenzklassen.

Proposition 1.18 *a) Die Menge F/N wird mit den Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ definiert durch*

$$[a] + [b] := [a + b] \quad \textit{und} \quad [a] \cdot [b] := [a \cdot b]$$

zu einem Körper. Das Neutralelement der Addition ist $[0] = N$, das der Multiplikation ist $[1] = 1 + N$.

b) Vermöge der Abbildung

$$x \mapsto (x, x, x, \ldots) + N$$

können wir $\mathbb{Q}$ als Teilmenge von F/N auffassen. Schränkt man die Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ von F/N auf $\mathbb{Q}$ ein, so erhält man die gewöhnliche Addition und Multiplikation von $\mathbb{Q}$.

Beweis: a) Zunächst ist zu zeigen, dass die Verknüpfungen *wohldefiniert* sind: Nach Definition werden $[a]$ und $[b]$ addiert (multipliziert), indem man sich Vertreter a und b aus den Mengen wählt, diese addiert (multipliziert) und dann die Äquivalenzklasse des Ergebnisses bildet. Zu zeigen ist, dass diese Äquivalenzklasse unabhängig von der Wahl von a und b ist. Seien also $a' \in [a]$ und $b' \in [b]$ andere Vertreter der Äquivalenzklassen. Dann gilt $a' = a + n$ und $b' = b + m$ für Nullfolgen $n, m \in N$ und damit

$$[a' + b'] = [a + n + b + m] = a + b + \underbrace{n + m + N}_{=N} = [a + b].$$

Genauso rechnet man dies für die Multiplikation nach, wobei man verwenden muss, dass $a \cdot n \in N$ für $a \in F$ und $n \in N$ gilt.
Die Assoziativität und Kommutativität der Addition und Multiplikation und die Distributivgesetze ergeben sich durch Nachrechnen direkt aus den Eigenschaften der entsprechenden Verknüpfung auf F. Ebenso rechnet man nach, dass $[0]$ und $[1]$ die entsprechenden neutralen Elemente sind und dass $[-a]$ das additive Inverse zu $[a]$ ist, d.h. $[a] + [-a] = [0]$.
Zu zeigen ist noch, dass jedes Element $[a] \neq [0]$ ein multiplikatives Inverses $[b]$ besitzt, d.h. $[a] \cdot [b] = [1]$. Der Kandidat für $[b]$ ist natürlich $b = (a_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$.
Zunächst zeigt man, dass aus der Tatsache, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und keine Nullfolge ist, folgt, dass ein $N' \in \mathbb{N}$ und ein $M > 0$ existiert mit $|a_n| > M$ für alle $n \geq N'$.
Wir setzen $b_n = a_n^{-1}$ für $n \geq N'$ und $b_n = 1$ für die endlich vielen $n < N'$. Dann ist $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, denn sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Dann finden wir einen Index $N \geq N'$, so dass für $n, m \geq N$ die Ungleichung $|a_m - a_n| < \varepsilon \cdot M^2$ gilt. Damit ist für $n, m \geq N$

$$|b_n - b_m| = |a_n^{-1} - a_m^{-1}| = |(a_n a_m)^{-1}| \cdot |(a_m - a_n)| < M^{-2} \cdot \varepsilon \cdot M^2 = \varepsilon.$$

Desweiteren ist $a_n b_n = 1$ für alle n bis auf endlich viele Ausnahmen, und damit $[a] \cdot [b] = [1]$.

b) Zu zeigen ist, dass nicht zwei verschiedene rationale Zahlen das gleiche Bild haben. Seien also $x, y \in \mathbb{Q}$, $x \neq y$. Dann gilt $(x, x, x, \ldots) + N = (y, y, y, \ldots) + N$ genau dann, wenn $(x - y, x - y, x - y, \ldots)$ eine Nullfolge ist. Das bedeutet aber $x = y$, ein Widerspruch. Die zweite Aussage folgt direkt aus der Definition. ■

Definition 1.19 *F/N heißt der Körper der reellen Zahlen und wird mit $\mathbb{R}$ bezeichnet.*

Um von Konvergenz von Folgen sprechen zu können, benötigen wir auf $\mathbb{R}$ eine Ordnung, mit deren Hilfe wir dann analog zu $\mathbb{Q}$ einen Absolutbetrag definieren können. Wir nennen eine Cauchyfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$ positiv, falls es ein $\varepsilon > 0$ und ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq N$ gilt: $a_n > \varepsilon$. Damit definieren wir wann $x \leq y$ gelten soll: Sei $x = [a]$ und $y = [b]$. Dann gelte

$$[a] \leq [b] \quad \text{genau dann, wenn } (b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ positiv oder eine Nullfolge ist.}$$

Genauso wie oben, muss man wieder zeigen, dass diese Definition wohldefiniert, also unabhängig von den Vertretern der Klassen ist und dann nachweisen, dass $\leq$ alle Eigenschaften hat, die man schon von $\mathbb{Q}$ gewohnt ist. Das wollen wir hier nicht tun, sondern verweisen auf [Ebb].
Nun können wir von Cauchyfolgen in $\mathbb{R}$ (d.h. Cauchyfolgen von Klassen von Cauchyfolgen!) reden und zeigen:

Proposition 1.20 *$\mathbb{R}$ ist* vollständig*, d.h. in $\mathbb{R}$ hat jede Cauchyfolge einen Grenzwert.*

Beweis: Nach Konstruktion gilt in $\mathbb{R}$:

(1) Jedes Element $\alpha \in \mathbb{R}$ ist der Grenzwert einer rationalen Folge r_n.

(2) In $\mathbb{R}$ hat jede rationale Cauchyfolge einen Grenzwert.

Es sei $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge von reellen Zahlen. Nach (1) gibt es zu $n \in \mathbb{N}$ ein $r_n \in \mathbb{Q}$ mit $|\alpha_n - r_n| < \frac{1}{n}$. Wir behaupten, dass dann $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Denn sei $\varepsilon > 0$ und N so groß, dass $\frac{1}{N} < \frac{1}{3}\varepsilon$ und $|\alpha_n - \alpha_m| < \varepsilon$ gilt für $n, m \geq N$. Dann gilt für $n, m \geq N$

$$|r_n - r_m| \leq |r_n - \alpha_n| + |\alpha_n - \alpha_m| + |\alpha_m - r_m| < \frac{1}{n} + \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{m} = \varepsilon\,.$$

Nach (2) hat nun $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Grenzwert $r \in \mathbb{R}$. Dann konvergiert aber auch $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen r. Denn sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen N' so groß, dass $\frac{1}{N'} < \frac{1}{2}\varepsilon$ und $|r_n - r| < \frac{1}{2}\varepsilon$ für alle $n \geq N'$ gilt. Damit gilt für $n \geq N'$:

$$|\alpha_n - r| \leq |\alpha_n - r_n| + |r_n - r| < \frac{1}{N'} + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon\,. \qquad \blacksquare$$

Bemerkung 1.21 Alle Definitionen und Rechenregeln, die wir in Abschnitt 1.2 für $\mathbb{Q}$ diskutiert haben, übertragen sich wortwörtlich auf $\mathbb{R}$.

In $\mathbb{R}$ hat nun jede Dezimalbruchfolge einen Grenzwert, denn sie ist eine Cauchyfolge. Umgekehrt gilt:

Korollar 1.22 *Jede reelle Zahl x ist der Grenzwert einer eindeutig bestimmten Dezimalbruchfolge, die nicht auf die Periode $\overline{9}$ endet.*

Beweis: Wir konstruieren die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ folgendermaßen. Es sei

$$\begin{aligned}
a_0 &\in \mathbb{Z} & &\text{mit } x \in [a_0, a_0 + 1) \\
a_1 &\in \{0, \dots, 9\} & &\text{mit } x \in [a_0 + \tfrac{a_1}{10},\ a_0 + \tfrac{a_1}{10} + \tfrac{1}{10}) \\
a_2 &\in \{0, \dots, 9\} & &\text{mit } x \in [a_0 + \tfrac{a_1}{10} + \tfrac{a_2}{10^2},\ a_0 + \tfrac{a_1}{10} + \tfrac{a_2}{10^2} + \tfrac{1}{10^2}) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Die Folge $(S_n) = (a_0, a_1 a_2 \dots a_n)$ konvergiert gegen x und mit der gleichen Argumentation wie im Beweis von Satz 1.15 sieht man, dass die a_i eindeutig durch x bestimmt sind. $\blacksquare$

Was bedeutet die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$? Die folgenden vier Sätze, das Intervallschachtelungsprinzip, der Satz von Bolzano[4]-Weierstraß[5], das Supremumsprinzip und das Monotoniekriterium liefern alle zur Vollständigkeit äquivalente Aussagen. Wir zeigen hier allerdings nur, wie diese aus der Vollständigkeit abgeleitet werden können.

[4]Bernhard Bolzano, 1781–1848

[5]Karl Weierstraß, 1815–1897

Definition 1.23 *Eine* Intervallschachtelung *ist eine Folge* $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ *von ineinander enthaltenen abgeschlossenen Intervallen*

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots$$

so dass die Intervalllänge $b_n - a_n$ *für* $n \to \infty$ *gegen* 0 *konvergiert.*

Proposition 1.24 (Intervallschachtelungsprinzip) *Zu jeder Intervallschachtelung* $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ *gibt es genau ein* $x \in \mathbb{R}$ *mit* $x \in [a_n, b_n]$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

Zum Beispiel kann man eine Dezimalbruchfolge als Intervallschachtelung

$$[a_0, a_1 a_2 \dots a_n,\ a_0, a_1 a_2 \dots a_n + \tfrac{1}{10^n}]$$

auffassen. In diesem Fall ist ihr Grenzwert $x = a_0, a_1 a_2 \dots$, die in all diesen Intervallen enthaltene reelle Zahl.

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass die Folge der Randpunkte $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist: Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es wegen $b_n - a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|b_N - a_N| < \varepsilon$$

gilt. Da für $n, m \geq N$ die Intervallgrenzen a_n und a_m in $[a_N, b_N]$ enthalten sind, gilt

$$|a_n - a_m| \leq |b_N - a_N| < \varepsilon\,.$$

Also ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und konvergiert somit nach Proposition 1.20 gegen ein $x \in \mathbb{R}$. Wegen $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist x in allen Intervallen $[a_n, b_n]$ enthalten. Wäre $y \in \mathbb{R}$, $y \neq x$ ebenfalls in allen Intervallen $[a_n, b_n]$ enthalten, so gälte

$$|x - y| \leq b_n - a_n$$

Wegen $b_n - a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ wäre dann $|x - y| = 0$ und damit $x = y$, ein Widerspruch. ■

Definition 1.25 *Sei* n_k *eine streng mononton wachsende Folge von natürlichen Zahlen*

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$$

und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge. Dann heißt* $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ Teilfolge *von* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so auch jede Teilfolge, und zwar gegen den gleichen Grenzwert.

Satz 1.26 (Satz von Bolzano-Weierstraß) *Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge.*

Beweis: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge, also $A \leq x_n \leq B$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $A, B \in \mathbb{R}$. Wir konstruieren eine Intervallschachtelung folgendermaßen. Sei $[a_1, b_1] = [A, B]$ und $M = \frac{A+B}{2}$. In mindestens einem der Intervalle $[A, M]$ oder $[M, B]$ liegen unendlich viele x_n; wir wählen dieses als Intervall $[a_2, b_2]$. Genauso sei $[a_3, b_3]$ eines der Intervalle $[a_2, \frac{a_2+b_2}{2}]$ oder $[\frac{a_2+b_2}{2}, b_2]$, das unendlich viele x_n enthält, usw.
Dies definiert eine Intervallschachtelung, denn $b_n - a_n = \frac{1}{2^{n-1}}(B - A) \to 0$ $(n \to \infty)$. Um eine konvergente Teilfolge zu erhalten wählen wir

x_{n_1} eines der unendlich vielen Folgenglieder in $[a_1, b_1]$,
x_{n_2} eines der unendlich vielen Folgenglieder in $[a_2, b_2]$ mit $n_2 > n_1$,
x_{n_3} eines der unendlich vielen Folgenglieder in $[a_3, b_3]$ mit $n_3 > n_2$,
usw.

Die so konstruierte Folge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge, denn sei $\varepsilon > 0$ und N, so groß, dass $b_N - a_N < \varepsilon$ gilt. Dann gilt für $k, l \geq N$: x_{n_l}, $x_{n_k} \in [a_N, b_N]$ und damit

$$|x_{n_l} - x_{n_k}| \leq b_N - a_N < \varepsilon\,.$$

Damit konvergiert $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ nach Proposition 1.20. ∎

Definition 1.27 *Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von reellen Zahlen heißt* monoton wachsend (fallend)*, falls für alle n gilt: $a_n \leq a_{n+1}$ (bzw. $a_n \geq a_{n+1}$).*

Proposition 1.28 (Monotoniekriterium) *Eine beschränkte, monoton wachsende (fallende) Folge reeller Zahlen hat einen Grenzwert in $\mathbb{R}$.*

Beweis: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und beschränkt. Dann hat $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge (a_{n_k}) mit Grenzwert $x \in \mathbb{R}$. Wir behaupten, dass dann auch die Folge selbst gegen x konvergiert.
Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $K \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \geq K$ gilt: $|a_{n_k} - x| < \varepsilon$. Wir wählen $N = n_K$ und wollen für alle $n \geq N$ zeigen, dass $|a_n - x| < \varepsilon$ gilt. Da $n_k \to \infty$ gilt, gibt es ein $k \geq K$ mit $n_k \leq n \leq n_{k+1}$ und da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist, folgt

$$a_{n_k} \leq a_n \leq a_{n_{k+1}} \leq x,$$

was

$$|a_n - x| \leq |a_{n_k} - x| < \varepsilon$$

impliziert. ∎

Definition 1.29 *Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Eine reelle Zahl $C > 0$ heißt* obere (bzw. untere) Schranke von M*, falls für alle $x \in M$ gilt: $x \leq C$ (bzw. $x \geq C$). Existiert eine obere (bzw. untere) Schranke, so heißt M nach oben (bzw. nach unten) beschränkt.*

Proposition 1.30 (Supremumsprinzip) *Jede nach oben (unten) beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat eine kleinste obere (größte untere) Schranke.*

Notation 1.31 *Die kleinste obere Schranke von M heißt* Supremum von M, *geschrieben* $\sup M$. *Die größte untere Schranke von M heißt* Infimum von M, *geschrieben* $\inf M$. *Ist M nicht nach oben (bzw. unten) beschränkt, so schreiben wir* $\sup M = \infty$ *(bzw.* $\inf M = -\infty$*).*

Beweis: Wir beschränken uns auf den Fall der kleinsten oberen Schranke. Sei C_1 eine obere Schranke von M und $x_1 \in M$. Wir betrachten $\frac{x_1+C_1}{2}$. Ist dies eine obere Schranke von M, so setzen wir $x_2 := x_1$ und $C_2 = \frac{x_1+C_1}{2}$. Andernfalls gibt es ein $x_2 \in M$ mit $x_2 > \frac{x_1+C_1}{2}$ und wir setzen $C_2 := C_1$. In dieser Weise fahren wir fort und erhalten eine monoton wachsende Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elemente von M und eine monoton fallende Folge $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von oberen Schranken von M, und es gilt $C_n - x_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}(C_1 - x_1)$. Nach dem Monotoniekriterium 1.28 konvergieren beide Folgen, und zwar gegen denselben Grenzwert a. Nun gilt $a = \sup M$: Zum einen ist x eine obere Schranke von M, denn für jedes $x \in M$ gilt $x \leq C_n$ und damit auch $x \leq \lim_{n\to\infty} C_n = a$. Wäre a nicht die kleinste obere Schranke, so gäbe es ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $x \in M$ gälte: $x < a-\varepsilon$. Damit folgt aber $a = \lim_{n\to\infty} x_n \leq a-\varepsilon < a$, ein Widerspruch. ∎

3:27.4.2015

1.5 Überabzählbarkeit der reellen Zahlen

Wie viele Elemente enthält $\mathbb{R}$ im Vergleich zu $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{Q}$? $\mathbb{N}$ ist sicher abzählbar. Wir können aber auch die ganzen Zahlen wie folgt abzählen

$$\mathbb{Z} = \{m_1 = 0, m_2 = 1, m_3 = -1, m_4 = 2, m_5 = -2, \ldots\}.$$

Satz 1.32 $\mathbb{Q}$ *ist abzählbar,* $\mathbb{R}$ *ist überabzählbar.*

Beweis: Der Beweis geht auf Georg Cantor[6] zurück. Zur Abzählung von $\mathbb{Q}$ benutzt man das 1. Cantor'sche Diagonalverfahren und schreibt die positiven rationalen Zahlen folgendermaßen auf

$$\begin{array}{ccccccccc}
\vdots & & & & & & & & \\
\frac{1}{4} & & \frac{2}{4} & & \frac{3}{4} & & \frac{4}{4} & & \\
| & \diagdown & & & & & & & \\
\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \frac{3}{3} & & \frac{4}{3} & & \\
 & \diagdown & & \diagdown & & & & & \\
\frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{4}{2} & & \\
| & \diagdown & & \diagdown & & \diagdown & & & \\
\frac{1}{1} & & \frac{2}{1} & — & \frac{3}{1} & & \frac{4}{1} & — & \cdots
\end{array}$$

[6] Georg Cantor, 1845 – 1918

Dann streicht man alle Brüche, die mehrfach vorkommen. Um ganz $\mathbb{Q}$ abzuzählen verwendet man denselben Trick wie bei $\mathbb{Z}$.

Um die Nichtabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ zu zeigen, benutzt man Cantors 2. Diagonalverfahren und argumentiert durch einen Widerspruchsbeweis. Angenommen $\mathbb{R}$ wäre abzählbar. Dann können wir auch die Zahlen im Intervall $(0,1]$ abzählen, z.B. als Dezimalbrüche

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0, a_{11}a_{12}a_{13}\ldots \\
a_2 &= 0, a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\ldots \\
a_3 &= 0, a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}\ldots \\
a_4 &= 0, a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}a_{45}\ldots \\
\vdots & \quad \vdots
\end{aligned}$$

Nun konstruieren wir folgendermaßen eine Zahl $b \in (0,1]$, die in dieser Abzählung nicht auftauchen kann. Für die Ziffern

$$b = 0, b_1b_2b_3b_4\ldots$$

der Dezimalbruchentwicklung wählen wir $b_i = 1$, falls $a_{ii} \neq 1$ ist und $b_i = 2$, falls $a_{ii} = 1$ ist. Dann ist $b \neq a_n$ für alle n. ∎

1.6 Unendliche Reihen

Im letzten Abschnitt wollen wir noch kurz unendliche Reihen und deren Konvergenz diskutieren.

Lemma 1.33 *Wenn die unendliche Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, dann ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.*

Beweis: Wenn der Grenzwert der Folge $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ existiert, so ist $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Deshalb gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt

$$|S_n - S_{n-1}| < \varepsilon\,.$$

Andererseits ist $S_n - S_{n-1} = a_n$ und damit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. ∎

Umgekehrt folgt aus der Tatsache, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, nicht, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ existiert.

Proposition 1.34 *Die harmonische Reihe*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}$$

ist divergent.

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}
1+\tfrac{1}{2} & & &= \tfrac{3}{2}\\
\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4} &> 2\cdot\tfrac{1}{4} & &= \tfrac{1}{2}\\
\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8} &> 4\cdot\tfrac{1}{8} & &= \tfrac{1}{2}\\
&\vdots\\
\tfrac{1}{2^m+1}+\tfrac{1}{2^m+2}+\ldots+\tfrac{1}{2^{m+1}} &> 2^m\cdot\tfrac{1}{2^{m+1}} & &= \tfrac{1}{2}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Also ist die 2^m-te Partialsumme $S_{2^m} = \sum_{k=1}^{2^m}\frac{1}{k} > \frac{1}{2}m+1$. Damit divergiert die Teilfolge $(S_{2^m})_{m\in\mathbb{N}}$, und deshalb auch die Folge der Partialsummen selbst. ■

Bemerkung 1.35 Ersetzt man $\frac{1}{k}$ durch $\frac{1}{k^2}$ oder allgemein durch $\frac{1}{k^r}$ für ein $r \geq 2$, dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^r}$. Zur Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ muss das Reihenglied a_n also "schnell genung" gegen 0 konvergieren.

Eine weitere wichtige Reihe ist die Exponentialreihe. Zu $n \in \mathbb{N}_0$ sei

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1,$$

die *Fakultät von* n, wobei $0! = 1$ gesetzt wird. Es ist

$$1! = 1,\ 2! = 2,\ 3! = 6,\ 4! = 24,\ 5! = 120,\ \ldots$$

Proposition 1.36 *Die Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3\cdot 2}+\frac{1}{4\cdot 3\cdot 2}+\ldots+\frac{1}{n!}$$

konvergiert. Ihr Grenzwert $e = 2,71828\ldots$ *heißt* Euler'sche[7] Zahl.

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{1!} &= \tfrac{1}{2^0}\\
\tfrac{1}{2!} &= \tfrac{1}{2^1},\\
\tfrac{1}{3!} = \tfrac{1}{3\cdot 2} &< \tfrac{1}{2^2}\\
\tfrac{1}{4!} = \tfrac{1}{4\cdot 3\cdot 2} &< \tfrac{1}{2^3}\\
&\vdots\\
\tfrac{1}{n!} &< \tfrac{1}{2^{n-1}}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

[7] Leonhard Euler, 1707 – 1783

und damit

$$0 \le S_N = \sum_{n=0}^{N} \tfrac{1}{n!} \le 1 + \sum_{n=1}^{N} \tfrac{1}{2^{n-1}} = 1 + \sum_{n=0}^{N-1} \tfrac{1}{2^n} \le 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{2^n} = 1 + \tfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3,$$

wobei wir im letzten Schritt Proposition 1.10 für den Grenzwert der geometrischen Reihe verwendet haben. Damit ist die Folge der Partialsummen $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ beschränkt und monoton wachsend, also konvergent nach dem Monotoniekriterium 1.28. Insbesondere haben wir auch $e \le 3$ gezeigt. ∎

Lemma 1.37 *Es gilt*

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Beweis: Sei $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ und $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$. Nach der allgemeinen binomischen Formel gilt

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k+1))}{\underbrace{n\cdots n}_{k-\text{mal}}} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k+1}{n}) \\
&\le \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = S_n \le \lim_{n\to\infty} S_n = e
\end{aligned}$$

Daraus folgt $a_n \le e$. Andererseits ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend, denn

$$(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k+1}{n}) < (1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{k+1}{n+1})$$

für $k \in \{0,\dots,n\}$ und der Term für $k = n+1$ ist positiv. Aus dem Monotoniekriterium 1.28 folgt, dass $a_n \to a$ $(n \to \infty)$ für ein $a \in \mathbb{R}$ gilt. Wegen obiger Ungleichung ist $a \le e$. Zu zeigen ist also noch $a \ge e$. Für $n \ge m$ gilt

$$\begin{aligned}
a_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k+1}{n}) \\
&\ge \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k+1}{n})
\end{aligned}$$

Die letzte Summe konvergiert für $n \to \infty$ gegen S_m. Damit gilt $a = \lim_{n\to\infty} a_n \ge S_m$ für jedes feste $m \in \mathbb{N}$ und damit auch für den Grenzwert $a \ge \lim_{m\to\infty} S_m = e$, also insgesamt $a = e$. ∎

Allgemein kann man folgendes Konvergenzkriterium für unendliche Reihen zeigen.

Proposition 1.38 (Majorantenkriterium) *Es seien* $(\sum_{n=1}^{N} x_n)_{N\in\mathbb{N}}$*,* $(\sum_{n=1}^{N} y_n)_{N\in\mathbb{N}}$ *zwei Reihen, und* $y_n \geq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$*.*

a) Wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ *gilt:* $|x_n| \leq y_n$ *und wenn der Grenzwert* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ *existiert, so konvergiert auch die Reihe* $\sum_{n=1}^{N} x_n$*.*

b) Wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ *gilt:* $x_n \geq y_n$ *und die Reihe* $\sum_{n=1}^{N} y_n$ *divergiert, so divergiert auch die Reihe* $\sum_{n=1}^{N} x_n$*.*

Beweis: a) Es seien $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ und $T_n = \sum_{k=1}^{n} y_k$. Für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$ gilt wegen der Dreiecksungleichung und $|x_k| \leq y_k$:

$$|S_n - S_m| = |\sum_{k=m+1}^{n} x_k| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |x_k| \leq \sum_{k=m+1}^{n} y_k = T_n - T_m \leq |T_n - T_m|$$

Da $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, also eine Cauchyfolge ist, gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für $n, m \geq N$ gilt:

$$|T_n - T_m| < \varepsilon\,.$$

Ohne Einschränkung sei $n \geq m$, sonst vertauschen wir die Rollen von n und m. Damit ist für $n, m \geq N$ auch $|S_n - S_m| < \varepsilon$, also $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und damit konvergent.
b) folgt aus a): Wäre $(\sum_{k=1}^{n} x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so auch $(\sum_{k=1}^{n} y_k)_{n\in\mathbb{N}}$. ∎

2 Stetige Funktionen

Definition 2.1 *Es sei* $D \subseteq \mathbb{R}$. *Eine* Funktion *ist eine Abbildung* $f : D \to \mathbb{R}$. D *heißt der* Definitionsbereich *von* f *und* $f(D) = \big\{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x) \text{ für ein } x \in D\big\}$ *heißt das* Bild *von* f.

Der Definitionsbereich wird bei uns für gewöhnlich ein Intervall (offen, abgeschlossen oder halboffen) oder eine endliche Vereinigung von Intervallen sein. Dabei seien auch die folgenden Intervalle zugelassen:

$$(-\infty, a) := \big\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\big\} \qquad (-\infty, a] := \big\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\big\}$$
$$(a, \infty) := \big\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\big\} \qquad [a, \infty) := \big\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\big\}$$

und $(-\infty, \infty) := \mathbb{R}$.
Funktionen mit unterschiedlichen Definitionsbereichen sind verschieden, auch wenn sie die gleiche Abbildungsvorschrift haben sollten. So ist

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$$

eine andere Funktion als

$$[0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2,$$

denn die erste ist nicht injektiv, da $f(x) = f(-x)$ gilt, die zweite dagegen schon. Denn seien $x, y \in [0, \infty)$ und es gelte $f(x) = x^2 \neq y^2 = f(y)$. Dann folgt $0 = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$, also $x = \pm y$ und wegen $y \geq 0$, damit $x = y$.

Beispiel 2.2 (1) Sei $c \in \mathbb{R}$. Die durch

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = c$$

definierte Funktion ist *konstant*. Wir schreiben dafür $f \equiv c$. Insbesondere ist $f(\mathbb{R}) = \{c\}$.

(2) Die durch

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = x$$

definierte Funktion heißt *identische Funktion* oder *Identität*.

(3) Die Identität ist ein spezieller Fall von *Polynomfunktionen*, das sind Funktionen der Art

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

mit vorgegebenen $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Z.B. ist $x \mapsto x^5 + 4x^3 - 2x$ eine Polynomfunktion.

(4) Noch allgemeiner können wir aus zwei Polynomfunktionen f, g mit $g \not\equiv 0$ die *rationale Funktion*

$$F : D_F \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

bilden. Diese ist allerdings so nur auf der Menge $D_F = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \neq 0\}$ definiert. Z. B. ist $x \mapsto \frac{1}{x}$ eine rationale Funktion mit (maximalem) Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(5) Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

heißt Heaviside-Funktion[8].

4:04.05.2015

Funktionen kann man addieren und multiplizieren und in bestimmten Fällen ineinander einsetzen.

Definition 2.3 *Seien $f : D_f \to \mathbb{R}$, $g : D_g \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Falls $D_f = D_g =: D$ gilt, definieren wir*

$$f + g : D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) + g(x) \qquad \textit{und} \qquad f \cdot g : D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) \cdot g(x).$$

Gilt $f(D_f) \subset D_g$, so kann man auch die Hintereinanderausführung

$$g \circ f : D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(f(x))$$

definieren.

Eine der wichtigsten Eigenschaften von Funktionen ist die Stetigkeit. Anschaulich soll eine Funktion stetig sein, wenn man sie "mit einem Mal ohne Abzusetzen" zeichnen kann, wenn sie also keine Sprungstellen besitzt. Eine formale Definition der Stetigkeit hat Mathematiker einige Zeit beschäftigt. Mittlerweile hat sich folgende "ε-δ-Definition" durchgesetzt.

Definition 2.4 *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt stetig in $x \in D$, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass*

$$\textit{für alle } y \in D \textit{ mit } |y - x| < \delta \textit{ gilt:} \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon\,.$$

Eine Funktion heißt stetig, falls sie in jedem $x \in D$ stetig ist.

Anders gesagt: Zu jeder vorgegebenen "Toleranz" $\varepsilon > 0$ können wir ein $\delta > 0$ garantieren, so dass für alle y mit Abstand kleiner als δ zu x der Funktionswert $f(y)$ um weniger als ε von $f(x)$ abweicht.

Beispiel 2.5 Die konstante Funktion $f \equiv c$ ist stetig, ebenso wie die Identität $f(x) = x$. Im ersten Fall kann man δ beliebig wählen, denn $|f(x) - f(y)| = |c - c| = 0$. Genauso rechnet man nach, dass man im zweiten Fall $\delta = \varepsilon$ wählen kann.

[8]Oliver Heaviside, 1850-1925

Ein gutes Kriterium zum Testen, ob eine Funktion stetig ist, liefert der folgende Satz.

Proposition 2.6 *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig in $x \in D$, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ und $x_n \in D$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x).$$

BEWEIS: Sei f stetig in $x \in D$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in D mit Grenzwert x. Nach Voraussetzung gibt es zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für alle $y \in D$ mit $|x - y| < \delta$ gilt, dass

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

ist. Da $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ gilt, gibt es zu $\delta > 0$ einen Index $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$

$$|x_n - x| < \delta$$

gilt. Dann gilt aber (mit $y = x_n$ in der obigen Aussage) auch $|f(x) - f(x_n)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$, was genau die Definition von $f(x_n) \to f(x)$ $(n \to \infty)$ ist.
Für die andere Implikation, ist vorausgesetzt, dass für jede Folge $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ auch $f(x_n) \to f(x)$ $(n \to \infty)$ gilt, und zu zeigen ist, dass f stetig ist. Angenommen f wäre nicht stetig. Dann gäbe es ein $\varepsilon > 0$, so dass die Aussage aus der Stetigkeit verletzt wäre, d.h.

$$\text{zu jedem } \delta > 0 \text{ fänden wir } y \in D \text{ mit } |x - y| < \delta, \text{ aber } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon\,.$$

Wir wählen $\delta = \frac{1}{n}$ und erhalten also zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $y_n \in D$ mit $|x - y_n| < \delta = \frac{1}{n}$, aber $|f(x) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Damit konvergiert die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x für $n \to \infty$, aber $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gegen $f(x)$, ein Widerspruch. ∎

Mit dieser äquivalenten Beschreibung von Stetigkeit zeigt man unter anderem unter Benutzung von Proposition 1.11 leicht, dass folgende Rechenregeln gelten.

Proposition 2.7 *Sind $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig, so auch*

$$f + g \qquad \textit{und} \qquad f \cdot g.$$

Gilt $g \not\equiv 0$, so ist

$$\frac{f}{g} : \widetilde{D} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \textit{wobei } \widetilde{D} = \big\{x \in D \mid g(x) \neq 0\big\}$$

stetig.
Sind $f : D_f \to \mathbb{R}$, $g : D_g \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(D_f) \subseteq D_g$, so ist

$$g \circ f$$

stetig.

Beweis: Exemplarisch beweisen wir, dass $f+g$ stetig ist, falls f und g stetig sind. Sei $x \in D$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in D mit Grenzwert x. Nun gilt nach Proposition 1.11 und aufgrund der Stetigkeit von f und g

$$\lim_{n\to\infty}(f+g)(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) + g(x_n) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$$

und damit nach Proposition 2.6, dass $f+g$ in x stetig ist. ■

Beispiel 2.8 (1) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist stetig. Allgemein sind Polynomfunktionen und auch rationale Funktionen auf ihrem Definitionsbereich stetig. Dies folgt sofort aus Proposition 2.7.

(2) Die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ ist stetig. Denn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert $x \in \mathbb{R}$ gilt nach der umgekehrten Dreiecksungleichung 1.4

$$|f(x) - f(x_n)| = \Big||x| - |x_n|\Big| \leq |x - x_n| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

und damit $f(x_n) \to f(x)$ $(n \to \infty)$.

(3) Die Heaviside-Funktion ist nicht stetig in $x = 0$, denn für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ gilt $f(x_n) = -1 \to -1$ $(n \to \infty)$, aber $f(0) = 1 \neq -1$.

(4) Zu $x \in \mathbb{R}$ sei $\lfloor x \rfloor = [x]$ die größte ganze Zahl $\leq x$. Die *Gauß-Klammer* ist die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \lfloor x \rfloor$. Sie ist auf jedem Intervall $(n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$ konstant, also stetig. In $n \in \mathbb{Z}$ ist sie aber unstetig, denn sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} = (n - \frac{1}{k})_{k\in\mathbb{N}}$. Dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} \lfloor x_k \rfloor = n - 1 \neq \lfloor \lim_{k\to\infty} x_k \rfloor = \lfloor n \rfloor = n.$$

Ein erster wichtiger Satz über stetige Funktionen ist der Zwischenwertsatz, der die Anschauung widerspiegelt, dass man stetige Funktionen "ohne Abzusetzen" zeichnen kann.

Satz 2.9 (Zwischenwertsatz) *Sei $D = [a, b]$ ein Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Sei y eine reelle Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Dann exisitert (mindestens) ein $\xi \in D$, $a \leq \xi \leq b$, so dass $f(\xi) = y$ gilt.*

Beweis: Wir betrachten nur den Fall $f(a) \leq f(b)$. Den anderen erhält man daraus durch Betrachten der Funktion $-f$. Wir konstruieren ξ mittels einer Intervallschachtelung. Sei $a_0 = a$, $b_0 = b$ und $M_0 = \frac{a+b}{2}$. Falls $f(M_0) = y$ ist, sind wir fertig. Andernfalls sei

$$\begin{cases} [a_1, b_1] = [a_0, M_0], & \text{wenn } f(a) \leq y < f(M) \\ [a_1, b_1] = [M_0, b_0], & \text{wenn } f(M) < y \leq f(b) \end{cases}.$$

Anschließend halbieren wir $[a_1, b_1]$ und erhalten auf die gleiche Weise wie eben ein Intervall $[a_2, b_2]$ mit $f(a_2) \leq y \leq f(b_2)$, usw.
Für die so erhaltene Folge $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ gilt

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b - a) \to 0 \text{ für } n \to \infty,$$

und damit ist $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung. Nach Proposition 1.24 gibt es ein $\xi \in \mathbb{R}$ mit $\xi \in [a_n, b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für dieses gilt $f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) = y$. ■

Beispiel 2.10 Sei $\alpha > 0$, $m \in \mathbb{N}$ und f die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^m - \alpha$. Wir wollen zeigen, dass die Gleichung $f(x) = x^m = \alpha$ genau eine Lösung $y > 0$ hat. Ist $\alpha \in (0, 1]$, so gilt

$$f(0) = -\alpha < 0 \quad \text{und} \quad f(1) = 1 - \alpha \geq 0$$

Da f stetig ist wird der Zwischenwert 0 nach dem Zwischenwertsatz angenommen, also existiert eine Lösung $y \in (0, 1]$. Ist $\alpha > 1$, so ist

$$f(0) = -\alpha < 0 \quad \text{und} \quad f(\alpha) = \alpha^m - \alpha = \alpha(\alpha^{m-1} - 1) \geq 0.$$

Aus der Stetigkeit von f und dem Zwischenwertsatz folgt wieder, dass eine Lösung $y \in (0, \alpha]$ existiert.

Die Lösung y ist auch eindeutig. Denn seine y_1, $y_2 > 0$ zwei Lösungen von $x^m = \alpha$. Dann gilt $(\frac{y_1}{y_2})^m = 1$. Ist $y_1 \neq y_2$, also z.B. $\frac{y_1}{y_2} > 1$, so ist nach Bemerkung 1.2 d) auch $(\frac{y_1}{y_2})^m > 1$. Also muss $y_1 = y_2$ gelten.

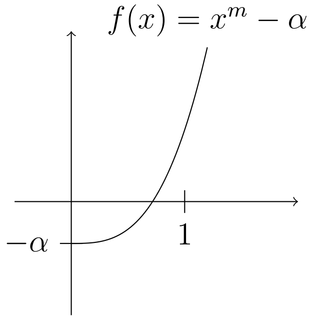

Abbildung 1: $f(x) = x^m - \alpha$ hat für $0 < \alpha < 1$ eine Nullstelle in $(0, 1)$

Notation 2.11 *Die eindeutige positive Lösung von $x^m = \alpha$ aus Beispiel 2.10 bezeichnen wir mit $\sqrt[m]{\alpha}$.*

Korollar 2.12 *Sei D ein Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(D)$ ein Intervall.*

Beweis: Wir setzen $A = \inf f(D)$ und $B = \sup f(D)$, wobei die Werte $-\infty$ und ∞ zugelassen seien, wenn $f(D)$ nicht nach unten, bzw. oben beschränkt ist. Dann gilt $(A, B) \subseteq f(D)$, denn sei $A < y < B$, also $A + \varepsilon < y < B - \varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$. Da A kleinste untere Schranke von $f(D)$ ist, gibt es ein $a \in D$ mit $f(a) < A + \varepsilon < y$. Genauso gibt es ein $b \in D$ mit $y < B - \varepsilon < f(b)$. Aus dem Zwischenwertsatz folgt, dass ein $x \in D$ mit $f(x) = y$ existiert. Damit ist $f(D)$ eines der Intervalle

$$(A, B), \quad [A, B), \quad (A, B], \quad \text{oder } [A, B]$$

je nachdem, ob das Infimum, bzw. Supremum als Funktionswert angenommen wird. ■

Proposition 2.13 *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und $D = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist $f(D)$ beschränkt. Außerdem nimmt f sein Maximum und Minimum auf D an, d.h. es gibt $x_{\max} \in D$ und ein $x_{\min} \in D$, so dass $f(x_{\max}) = \sup f(D)$ und $f(x_{\min}) = \inf f(D)$ gilt.*

Beweis: Angenommen, $f(D)$ wäre nicht beschränkt. Dann gäbe es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D, so dass $|f(x_n)| > n$ gälte. Da $a \leq x_n \leq b$ gilt, gibt es nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß 1.26 eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert $x \in [a,b]$. Damit gälte wegen der Stetigkeit $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x)$, also wäre $f(x_{n_k})$ insbesondere nach Lemma 1.13 beschränkt, im Widerspruch zu $|f(x_{n_k})| > n_k$.
Wir betrachten ohne Einschränkung die Aussage für das Maximum. Sei $B = \sup f(D)$. Nach Definition des Supremums finden wir eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $f(D)$, so dass $y_n \to B$ $(n \to \infty)$ gilt. (Zu $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $y_n \in D$, so dass $B - \frac{1}{n} \leq y_n \leq B$ ist.) Sei $x_n \in D$ ein Element mit $f(x_n) = y_n$. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, also gibt es eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert in D. Da f in D stetig ist und Teilfolgen von konvergenten Folgen denselben Grenzwert haben, gilt

$$f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} y_{n_k}) = \lim_{n\to\infty} y_n = B$$

Damit ist $x_{\max} = \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \in D$ die gesuchte Maximalstelle von f. ■

Bemerkung 2.14 Der Satz stimmt nicht mehr, wenn D nicht abgeschlossen oder nicht beschränkt ist, wie man z.B. an

$$f : (0,1) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x} \qquad \text{oder} \qquad f : [0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x$$

sieht.

5:11.05.2015

Falls eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ injektiv ist, so hat die Gleichung $y = f(x)$ für vorgegebenes $y \in f(D)$ genau eine Lösung $x \in D$. Wir können also eine Funktion

$$f(D) \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto x, \qquad \text{mit } f(x) = y$$

definieren. Diese Funktion heißt *Umkehrfunktion* und wir mit f^{-1} bezeichnet.[9]

Definition 2.15 *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt* streng monoton wachsend *(bzw.* streng monoton fallend*), falls für alle $x, y \in D$ mit $x < y$ gilt:*

$$f(x) < f(y) \qquad (\textit{bzw. } f(x) > f(y))$$

Eine streng monotone Funktion ist offenbar injektiv, hat also eine Umkehrfunktion.

Proposition 2.16 *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend (bzw. fallend) und D ein Intervall. Dann ist die Umkehrfunktion f^{-1} ebenfalls stetig und streng monoton wachsend (bzw. fallend).*

[9]Achtung: Man verwechsle $f^{-1}(x)$ nicht mit $f(x)^{-1} = \frac{1}{f(x)}$.

Die Voraussetzung, dass D ein Intervall ist, ist notwendig. Man betrachte z.B. auf $D = [0,1) \cup [2,3]$ die Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x, & \text{falls } 0 \leq x < 1 \\ x-1, & \text{falls } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}.$$

Dann ist f stetig und streng monoton wachsend mit Bild $[0,2]$, aber die Umkehrfunktion ist

$$f^{-1} : [0,2] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x, & \text{falls } 0 \leq x < 1 \\ x+1, & \text{falls } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}.$$

Diese hat offensichtlich an der Stelle $x = 1$ eine Sprungstelle. Genauer gilt für die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1 - \frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$, dass

$$\lim_{n\to\infty} f^{-1}(x_n) = \lim_{n\to\infty} 1 - \tfrac{1}{n} = 1 \neq f(1) = 2.$$

Damit ist nach Proposition 2.6 die Funktion f^{-1} bei $x = 1$ nicht stetig.

Beweis: Wir betrachten nur den Fall, dass f streng monoton wachsend ist. Dass die Umkehrfunktion f^{-1} streng monoton wachsend ist, ergibt sich direkt aus der strengen Monotonie von f. Desweiteren ist $f(D)$ nach Korollar 2.12 ein Intervall. Sei $f^{-1} : f(D) \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion zu f und $y \in f(D)$ zunächst kein Randpunkt von $f(D)$. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben und ohne Einschränkung so klein, dass das Intervall $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ mit $x = f^{-1}(y)$ ganz in D liegt. Wir setzen $y_1 = f(x - \varepsilon)$ und $y_2 = f(x + \varepsilon)$. Da f streng monoton wachsend ist, gilt $y_1 < y < y_2$. Wir wählen $\delta > 0$ so, dass $(y - \delta, y + \delta) \subseteq (y_1, y_2)$ gilt. Dann gilt für $y' \in D$ mit $|y - y'| < \delta$, dass

$$x - \varepsilon = f^{-1}(y_1) \leq f^{-1}(y - \delta) < f^{-1}(y') < f^{-1}(y + \delta) \leq f^{-1}(y_2) = x + \varepsilon$$

gilt, und damit $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y')| < \varepsilon$.
Für die Randpunkte kann man ähnlich verfahren, indem man halboffene Intervalle betrachtet. ∎

Beispiel 2.17 Für $m \in \mathbb{N}$ ist die Funktion $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $x \mapsto x^m$ streng monoton wachsend und stetig, also auch die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : [0,\infty) \to [0,\infty), \qquad x \mapsto \sqrt[m]{x}.$$

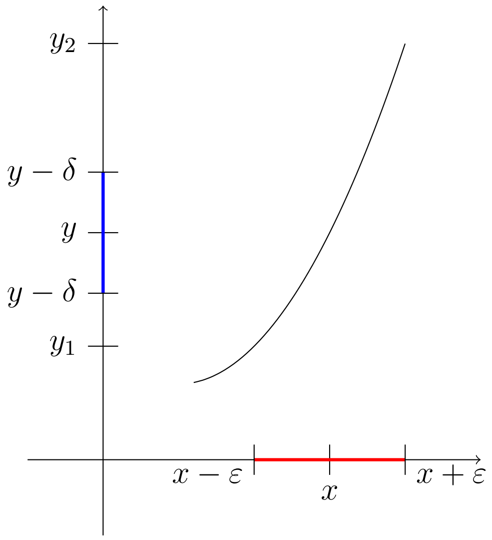

Abbildung 2: Beweis von Proposition 2.16

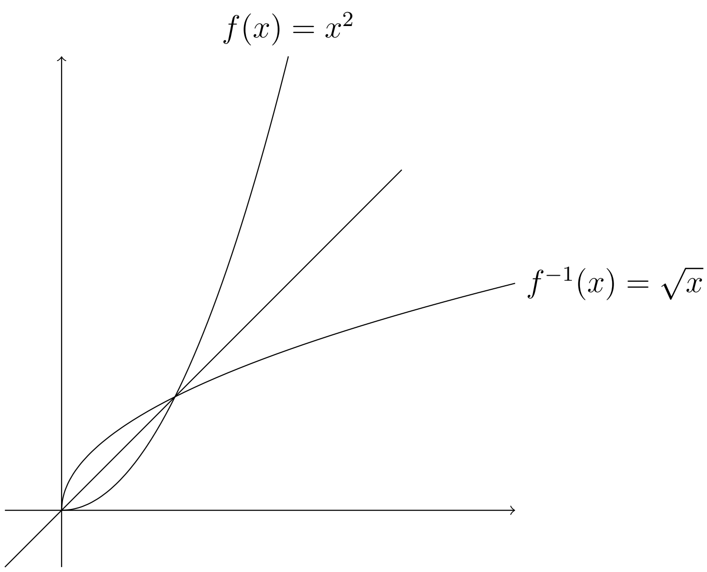

Abbildung 3: $f(x) = x^2$ und ihre Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

3 Trigonometrische Funktionen

3.1 Die Zahl π

Die Länge einer geraden Strecke ist einfach zu messen: Man kann sie direkt mit der entsprechenden Strecke auf dem Zahlenstrahl vergleichen. Wie aber misst man die Länge einer gekrümmten Strecke? Eine allgemeinere Antwort wollen wir später mittels Differentialrechnung geben. Hier wollen wir uns aber schon mit der Länge einer Strecke auf einem Kreis und speziell mit dem Umfang eines Kreises mit Radius r beschäftigen.

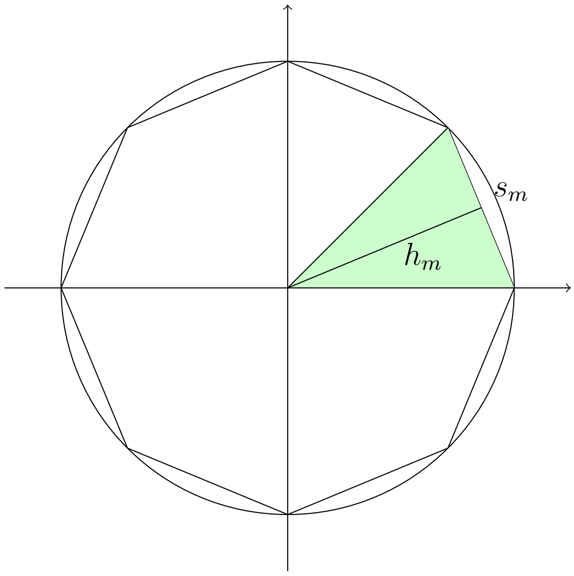

Abbildung 4: Approximation des Kreises durch regelmäßige m-Ecke

Die Idee zur Messung des Umfangs besteht darin, die Kreislinie durch immer kürzere gerade Streckenstücke anzunähern, deren Länge wir bestimmen können. Der Einfachheit halber nehmen wir hierzu das regelmäßige m-Eck. Die Seitenlänge s_m ist aufgrund des Strahlensatzes proportional zum Radius r. Damit ist auch der Umfang $U_m = m \cdot s_m$ des m-Ecks proportional zu r. Im Grenzwert konvergiert dieser Umfang U_m (zumindest anschaulich) gegen den Umfang U des Kreises mit Radius r, woraus folgt, dass $U = c \cdot r$ mit einem $c > 0$ gilt.
Wir definieren

$$\pi = \tfrac{c}{2}$$

als den halben Umfang. Insbesondere ist π der halbe Umfang des Einheitskreises.
Ähnlich kann man eine Formel für den Flächeninhalt des Kreises mit Radius r herleiten. Der Flächeninhalt des regelmäßigen m-Ecks ist

$$A_m = m \cdot \tfrac{1}{2} s_m \cdot h_m \cdot$$

wobei $\frac{1}{2}h_m s_m$ der Flächeninhalt eines der m Dreiecke ist, aus denen das regelmäßige m-Eck besteht, also h_m die Höhe. Nun gilt für $m \to \infty$:

$$h_m \to r \quad \text{und} \quad m \cdot s_m \to U$$

woraus sich für den Flächeninhalt A des Kreises mit Radius r ergibt:

$$A = \tfrac{1}{2} \cdot r \cdot U = \pi r^2.$$

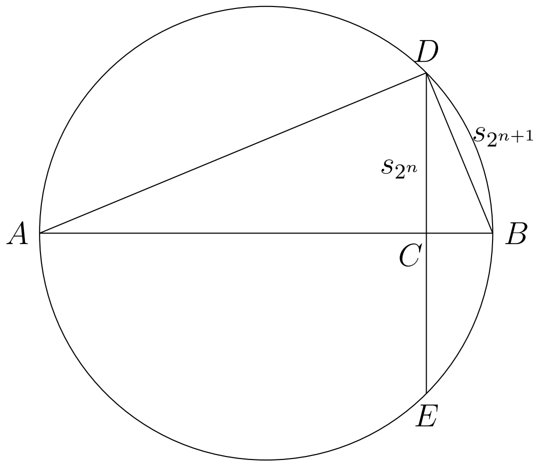

Abbildung 5: Berechnung der Seitenlänge $s_{2^{n+1}}$ aus s_{2^n}

Um π näherungsweise zu bestimmen, beschränken wir uns auf den Fall $m = 2^n$. Zur Approximation können wir das einbeschriebene regelmäßige 2^n-Eck und das umbeschrieben regelmäßige 2^n-Eck verwenden. Für $n = 2$, also das Quadrat, erhält man so für 2π die Abschätzung

$$4\sqrt{2} = 5.65685\ldots \leq 2\pi \leq 8.$$

Die Seitenlänge $s_{2^{n+1}}$ des regelmäßigen 2^{n+1}-Ecks kann man aus der Seitenlänge s_{2^n} des regelmäßigen 2^n-Ecks bestimmen. Das Dreieck ABD ist nach dem Thalessatz rechtwinklig. Wegen $\overline{AB} = 2$ gilt mit dem Satz von Pythagoras $\overline{AD} = \sqrt{4 - s_{2^{n+1}}^2}$, und damit für den Flächeninhalt von ABD

$$\frac{1}{2}\overline{AD} \cdot \overline{BD} = \frac{1}{2}s_{2^{n+1}} \cdot \sqrt{4 - s_{2^{n+1}}^2} = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \frac{s_{2^n}}{2}.$$

Damit folgt

$$s_{2^{n+1}}^2(4 - s_{2^{n+1}}^2) = s_{2^n}^2$$

also genügt $s_{2^{n+1}}^2$ der quadratischen Gleichung

$$x^2 - 4x + s_{2^n}^2 = 0$$

woraus

$$s_{2^{n+1}}^2 = 2 \pm \sqrt{4 - s_{2^n}^2}$$

also wegen $s_{2^{n+1}} < 2$

$$s_{2^{n+1}} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_{2^n}^2}}$$

folgt. Für die ersten Folgenglieder berechnet man

$$\begin{aligned}
s_4 &= \sqrt{2} \\
s_8 &= \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_4^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \\
s_{16} &= \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_8^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \\
s_{32} &= \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_{16}^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \\
&\vdots \\
s_{2^n} &= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\ldots + \sqrt{2}}}}} \qquad \text{mit } (n-3)\ + \text{-Zeichen} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Damit erhält man für π die Näherungen

n	$\frac{1}{2} \cdot s_{2^n} \cdot 2^n$
2	2.8284271247
3	3.0614674589
4	3.1214451522
5	3.1365484905
6	3.1403311569
7	3.1412772509
8	3.1415138011

Bemerkung 3.1 Man kann zeigen, dass die Zahl π irrational und sogar transzendent ist. Eine Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ heißt *transzendent*, wenn es keine Polynomfunktion $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_n x^n$ mit Koeffizienten $a_i \in \mathbb{Q}$ (und nicht alle 0) gibt, so dass $f(\alpha) = 0$ gilt. Andernfalls heißt α *algebraisch*. Zum Beispiel ist $\alpha = \sqrt{2}$ algebraisch, denn $f(x) = x^2 - 2$ ist eine Polynomfunktion mit Nullstelle $\sqrt{2}$.
Dass π transzendent ist, wurde erstmals 1882 von Ferdinand Lindemann (1852-1939)

bewiesen. Insbesondere bedeutet dies die Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises: Es gibt kein Verfahren, mit dem man mit Zirkel und Lineal aus einem Kreis ein Quadrat mit gleichem Flächeninhalt konstruieren kann. Gäbe es ein solches, so müsste man die Seitenlänge $\sqrt{\pi}$ des Quadrats mit Zirkel und Lineal konstruieren können. Da alle Längen, die man mit Zirkel und Lineal konstruieren kann, algebraische Zahlen sind, wäre $\sqrt{\pi}$ algebraisch und damit auch π.

3.2 Winkelmessung im Bogenmaß

Um Winkel zu messen verwendet man in der Analysis kein Grad, sondern das Bogenmaß. Die Größe des Winkels wird also durch die Länge des entsprechenden Kreisbogensegments auf dem Einheitskreis angegeben.

Grad	$360°$	$180°$	$90°$	$60°$	$45°$	$30°$
Bogenmaß	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

Allgemein gilt

$$\begin{array}{rcl} \alpha \text{ Grad} & \text{entspricht} & \alpha \cdot \dfrac{\pi}{180} \text{ im Bogenmaß} \\ \varphi \text{ im Bogenmaß} & \text{entspricht} & \varphi \cdot \dfrac{180}{\pi} \text{ Grad} \end{array}$$

3.3 Die trigonometrischen Funktionen: Sinus, Cosinus und Tangens

Zu einem Winkel $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ sei $\Delta(ABC)$ ein rechtwinkliges Dreieck mit Innenwinkel α bei A. Dann ist der Sinus von α definiert als

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Länge der Gegenkathete}}{\text{Länge der Hypotenuse}}.$$

Dieses Verhältnis ändert sich nicht, wenn man zu einem ähnlichen Dreieck übergeht – und da alle rechtwinkligen Dreiecke mit festem Winkel α ähnlich zueinander sind, hängt diese Definition nicht von der Wahl des Dreiecks ab. Man darf das Dreieck also so normieren, dass gilt

- A ist der Nullpunkt,
- C ist der Punkt auf dem Einheitskreis mit Abstand α im Bogenmaß von $(1, 0)$ und positiver y-Koordinate,
- B ist der Lotfußpunkt von C auf die x-Achse.

Dann ist $\sin(\alpha)$ die y-Koordinate der Ecke C. Genauso definieren wir

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Länge der Ankathete}}{\text{Länge der Hypotenuse}}.$$

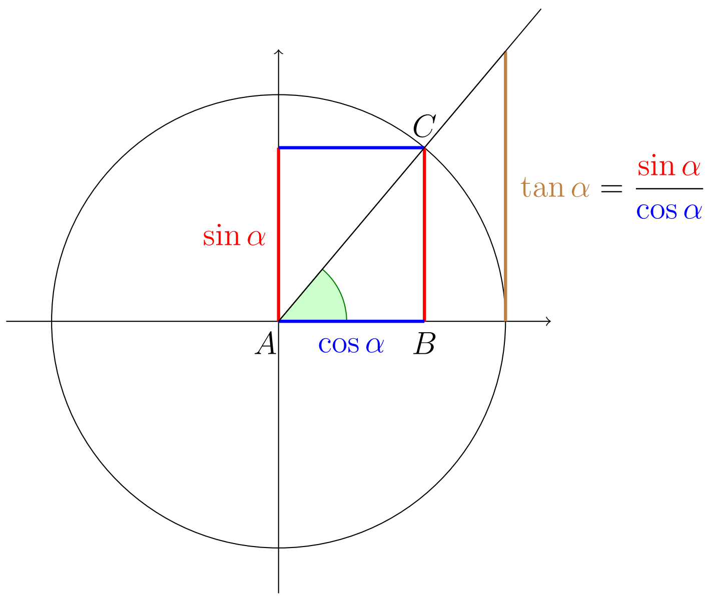

Abbildung 6: Sinus, Cosinus und Tangens

Dann ist $\cos(\alpha)$ die x-Koordinate des Punktes C.
Desweiteren definiert man den *Tangens* von α als Verhältnis

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Länge der Gegenkathete}}{\text{Länge der Ankathete}} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}.$$

Den Tangens kann man mittels Strahlensatz ebenfalls am Einheitskreis ablesen. Daneben gibt es noch den *Cotangens*, definiert als

$$\cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{1}{\tan(\alpha)}$$

Man erweitert den Definitionsbereich von sin und cos auf $\alpha \in [0, 2\pi]$, indem man sin und cos als y- bzw. x-Koordinate eines Punkts auf dem Einheitskreis definiert. Da

$$\sin(0) = \sin(2\pi) = 0, \qquad \cos(0) = \cos(2\pi) = 1$$

gilt, kann man sin und cos sogar auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen, indem man sie als 2π-periodische Funktionen auffasst.

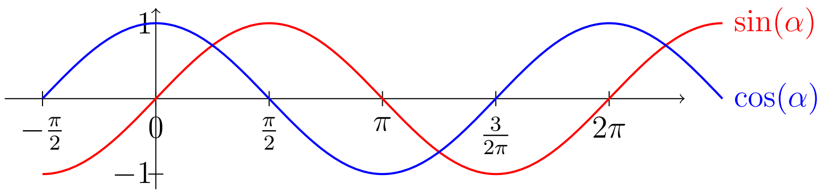

Abbildung 7: Sinus, Cosinus als Funktionen von $\alpha \in \mathbb{R}$

α	$\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1

Tabelle 1: Einige wichtige Werte von cos und sin

Durch Drehung um den Ursprung um $\frac{\pi}{2}$, bzw. π sieht man, dass insbesondere gilt:

$$\cos(\alpha + \tfrac{\pi}{2}) = -\sin(\alpha) \qquad \sin(\alpha + \tfrac{\pi}{2}) = \cos(\alpha) \tag{3.1}$$

$$\cos(\alpha + \pi) = -\cos(\alpha) \qquad \sin(\alpha + \pi) = -\sin(\alpha) \tag{3.2}$$

Desweiteren sieht man durch Spiegelung an der x-Achse: cos ist eine gerade Funktion und sin ist eine ungerade Funktion, d.h.

$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha) \tag{3.3}$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) \tag{3.4}$$

Aus der Definition und dem Satz des Pythagoras folgt sofort.

Satz 3.2 *Für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

Satz 3.3 (Additionstheoreme für Sinus und Cosinus) *Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \tag{3.5}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) \tag{3.6}$$

Insbesondere gelten die Halbwinkelformeln

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right), \qquad 1 + \cos\alpha = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

6:18.05.2015

Beweis: Wir beschränken uns auf den Fall α, β, $\alpha+\beta \in [0, \frac{\pi}{2})$. Den allgemeinen Fall erhält man mit den Formeln (3.1). Aus Abbildung 8 erhält man

$$\begin{aligned}
\overline{QA} &= \overline{QB}\cos\alpha = \sin\beta\cos\alpha \\
\overline{AR} &= \overline{BS} = \overline{0B}\,\sin\alpha = \cos\beta\sin\alpha \\
\overline{0S} &= \overline{0B}\cos\alpha = \cos\beta\cos\alpha \\
\overline{RS} &= \overline{AB} = \overline{QB}\sin\alpha = \sin\beta\sin\alpha
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\cos(\alpha+\beta) = \overline{0R} = \overline{0S} - \overline{RS} = \cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha$$

und

$$\sin(\alpha+\beta) = \overline{QR} = \overline{QA} + \overline{AR} = \sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha.$$

■

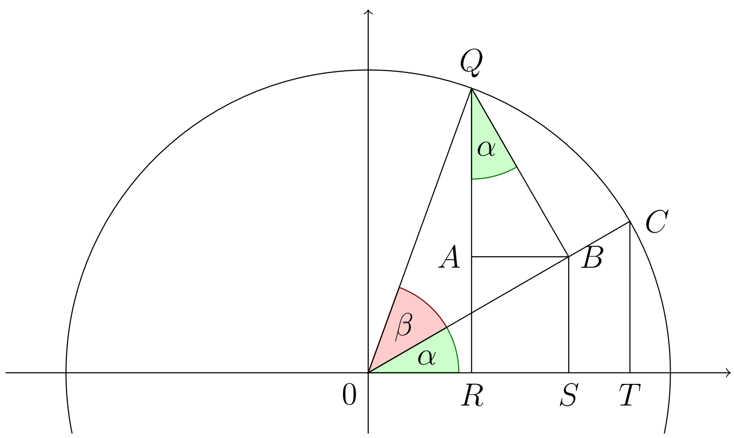

Abbildung 8: Beweis der Additionstheoreme

Lemma 3.4 *Für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt*

(3.7) $$|\sin\alpha| \le |\alpha|$$

(3.8) $$1 - \frac{\alpha^2}{2} \le \cos\alpha \le 1$$

und für $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$ gilt:

$$|\alpha| \le |\tan(\alpha)|.$$

Beweis: Wegen $|\sin\alpha| \leq 1$ genügt es die erste Ungleichung für $|\alpha| \leq \frac{\pi}{2}$ zu zeigen. Zum Beweis in diesem Fall appelieren wir an die Anschauung, dass die Bogenlänge $|\alpha|$ größer ist als die Seitenlänge $\overline{BC}$ in Abbildung 6. Die dritte Ungleichung, dass die Bogenlänge $|\alpha|$ kleiner ist als die Länge $|\tan(\alpha)|$ folgt genauso. Die zweite Ungleichung folgt aus der ersten mit den Halbwinkelformeln:

$$0 \leq 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \leq 2\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\alpha^2.$$

∎

Proposition 3.5 sin *und* cos *sind in jedem Punkt in* $\mathbb{R}$ *stetig.*

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass sin und cos stetig in 0 sind. Denn sei $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Nullfolge. Dann gilt wegen Lemma 3.4

$$|\sin(\alpha_n)| \leq |\alpha_n| \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

also $\lim_{n\to\infty} \sin(\alpha_n) = 0 = \sin(0)$ und

$$|\cos(\alpha_n) - \cos(0)| = |\cos(\alpha_n) - 1| \leq \tfrac{1}{2}\alpha_n^2 \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

also $\lim_{n\to\infty} \cos(\alpha_n) = \cos(0)$. Der allgemeine Fall folgt nun mit den Additionstheoremen 3.3. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit Grenzwert α. Dann gilt

$$\begin{aligned}
|\sin(\alpha_n) - \sin(\alpha)| &= |\sin(\alpha_n - \alpha + \alpha) - \sin(\alpha)| \\
&= |\sin(\alpha_n - \alpha)\cos(\alpha) + \cos(\alpha_n - \alpha)\sin(\alpha) - \sin(\alpha)| \\
&\leq \underbrace{|\sin(\alpha_n - \alpha)|}_{\to 0} \cdot |\cos(\alpha)| + \underbrace{|\cos(\alpha_n - \alpha) - 1|}_{\to 0} \cdot |\sin\alpha|
\end{aligned}$$

und damit insgesamt $\lim_{n\to\infty} \sin(\alpha_n) = \sin(\alpha)$. Für cos kann man eine ähnliche Rechnung machen, oder man benutzt, dass $\cos(\alpha) = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$ gilt. ∎

Satz 3.6 (Sinus- und Cosinussatz) *Für ein Dreieck mit Winkeln* α, β, γ *und gegenüberliegenden Seiten mit Längen* a, b, c *gilt:*

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} \tag{3.9}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \tag{3.10}$$

Beweis: Aus Abbildung 9 sieht man – zumindest, wenn das Dreieck spitzwinklig ist –

$$h_c = b\sin\alpha = a\sin\beta$$

woraus die erste Gleichung des Sinussatzes direkt folgt.[10] Die zweite erhält man unter Verwendung einer der anderen Höhen. Desweiteren gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$b^2 = x^2 + h_c^2, \qquad a^2 = (c - x)^2 + h_c^2$$

woraus mit $h_c = \cos\gamma_1 b = \cos\gamma_1 a$ und $x = \sin\gamma_1 c$, $c - x = \sin\gamma_2 a$ folgt:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2(h_c^2 - cx + x^2) = a^2 + b^2 - 2ab(\cos\gamma_1\cos\gamma_2 - \sin\gamma_1\sin\gamma_2)$$

Mit dem Additionstheorem für cos folgt die Behauptung des Cosinussatzes. ∎

[10] Was ändert sich, wenn der Winkel $\beta > \frac{\pi}{2}$ ist?

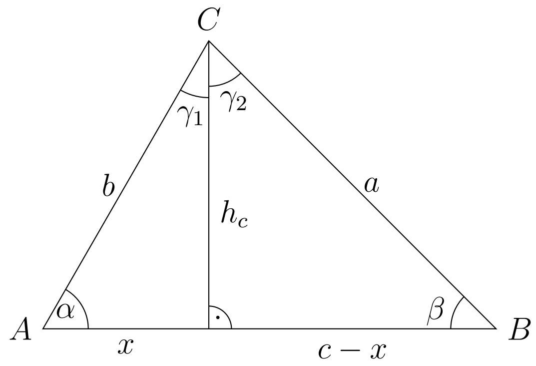

Abbildung 9: Beweis des Sinus- und Cosinussatzes

4 Die komplexen Zahlen

Die reellen Zahlen eignen sich zum Lösen von Gleichungen schon besser als die rationalen Zahlen, z.B. hat nun $x^2 = 2$ eine Lösung. Allerdings haben manche quadratischen Gleichungen nun zwei Lösungen, andere dagegen gar keine, wie z.B.

$$x^2 = -1.$$

Um diese Asymmetrie zu beheben, kann man die reellen Zahlen nochmals vergrößern zu der Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.

Definition 4.1 *Wir definieren* $\mathbb{C} = \big\{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{R}\big\} = \mathbb{R}^2$ *als Menge von geordneten Paaren von reellen Zahlen und auf* $\mathbb{C}$ *eine Addition und eine Multiplikation folgendermaßen: Seien* $z = (x,y)$, $w = (u,v) \in \mathbb{C}$. *Dann setzen wir*

$$\begin{aligned} z + w &= (x,y) + (u,v) := (x+u, v+w) \\ z \cdot w &= (x,y) \cdot (u,v) := (xu - yv, xv + yu) \end{aligned}$$

Identifiziert man $\mathbb{C}$ mit der reellen Zahlenebene $\mathbb{R}^2$, so ist die Definition der Addition genau die Vektoraddition in $\mathbb{R}^2$. Auch dem Produkt von zwei komplexen Zahlen kann man eine geometrische Bedeutung geben, wie wir weiter unten sehen werden.

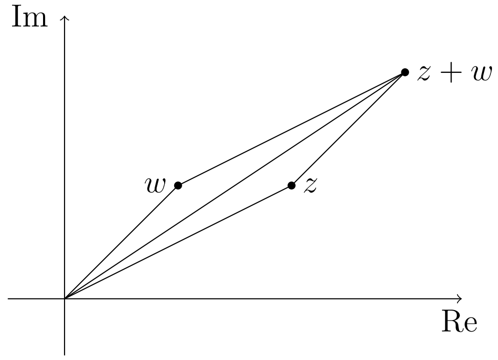

Abbildung 10: Komplexe Addition geometrisch

Proposition 4.2 $\mathbb{C}$ *wird mit den beiden Verknüpfungen* $+$ *und* $\cdot$ *zu einem Körper, d.h.*

a) $\mathbb{C}$ *mit der Addition ist eine abelsche (kommutative) Gruppe:* $+$ *ist assoziativ, kommutativ mit Neutralelement* $0 := (0,0)$ *und das Inverse zu* $(x,y) \in \mathbb{C}$ *ist* $(-x,-y) \in \mathbb{C}$.

b) $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ *mit der Multiplikation ist ebenfalls eine abelsche Gruppe mit Neutralelement* $1 := (1,0)$ *und das zu* $(x,y) \neq (0,0)$ *inverse Element ist*

$$\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right) \in \mathbb{C}\,.$$

c) Es gilt das Distributivgesetz: Für alle $z_1, z_2, w \in \mathbb{C}$ gilt

$$w \cdot (z_1 + z_2) = w \cdot z_1 + w \cdot z_2.$$

Durch die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto (x, 0)$ wird $\mathbb{R}$ zu einer Teilmenge von $\mathbb{C}$ und die Addition und Multiplikation eingeschränkt auf $\mathbb{R}$ ergeben die gewöhnliche Addition und Multiplikation von $\mathbb{R}$.

Der Beweis besteht im Grunde im Nachrechnen der entsprechenden Eigenschaften, ist allerdings etwas aufwändig, weshalb wir ihn hier nicht führen wollen.

Definition 4.3 *Wir definieren*

$$1 := (1, 0) \qquad \textit{und} \qquad \mathrm{i} := (0, 1).$$

Mit dieser Notation kann man $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ handlicher schreiben als

$$z = 1 \cdot x + \mathrm{i} \cdot y, \qquad \text{oder kürzer} \quad z = x + \mathrm{i}y.$$

Außerdem gilt nach der Formel für die Multiplikation:

$$\mathrm{i}^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$$

und allgemeiner für $z = x + \mathrm{i}y$, $w = u + \mathrm{i}v$ (mit $x, y, u, v \in \mathbb{R}$)

$$z \cdot w = (x + \mathrm{i}y) \cdot (u + \mathrm{i}v) = xu + \mathrm{i}xv + \mathrm{i}yu + \mathrm{i}^2 yv = (xu - yv) + \mathrm{i}(xv + yu).$$

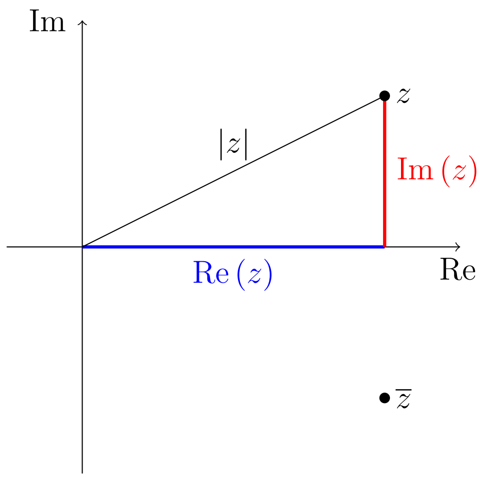

Abbildung 11: Realteil, Imaginärteil und komplexe Konjugation von $z \in \mathbb{C}$

Die x- und die y-Koordinate eines Punktes $z \in \mathbb{C}$ haben spezielle Namen, sowie auch der an der x-Achse gespiegelte Punkt.

Definition 4.4 *Ist $z = x + \mathrm{i}y = (x, y) \in \mathbb{C}$, so definieren wir*

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\,(z) &:= x && \textit{Realteil von } z \\ \mathrm{Im}\,(z) &:= y && \textit{Imaginärteil von } z \\ \overline{z} &:= x - iy = (x, -y) && \textit{die zu } z \textit{ komplex konjugierte Zahl} \end{aligned}$$

Es gilt

$$\mathrm{Re}\,(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Im}\,(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$$

und weiter ist $z \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $\overline{z} = z$ gilt.

Bemerkung 4.5 Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Durch Nachrechnen zeigt man:

a) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ und $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

b) $\overline{\overline{z}} = z$

c) $z \cdot \overline{z} = \overline{z} \cdot z = (x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y) = x^2 + y^2$ für $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$

d) $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}}$ für $z \neq 0$.

Beispiel 4.6 Für $z = 1 + 2i$ gilt:

$$\mathrm{Re}\,(z) = 1, \quad \mathrm{Im}\,(z) = 2, \quad \overline{z} = 1 - 2i, \quad \text{und} \quad z^{-1} = \frac{1 - 2i}{1^2 + 2^2} = \frac{1 - 2i}{5}.$$

4.1 Komplexer Betrag

Nach dem Satz des Pythagoras ist $\sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ der Abstand von $z = (x, y)$ von 0. Wir nennen

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$$

den *Betrag* der komplexen Zahl z.
Ist $z = x + \mathrm{i} \cdot 0 \in \mathbb{R}$, so gilt

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2} = |x|$$

wobei rechts der gewöhnliche Betrag von $\mathbb{R}$ steht.

Lemma 4.7 (Rechenregeln für den Betrag auf $\mathbb{C}$) *Seien $z = x + \mathrm{i}y, w = u + \mathrm{i}v \in \mathbb{C}$ mit $x, y, u, v \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

a) $|z| \geq 0$ und $|z| = 0$ genau dann, wenn $z = 0$.

*b) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ (*Multiplikativität*).*

*c) $|z + w| \leq |z| + |w|$ (*Dreiecksungleichung*).*

Beweis: Teil a) ist klar, da $x^2 + y^2 \geq 0$ gilt und der Ausdruck genau dann 0 ist, wenn $x = y = 0$ gilt.
Für b) rechnen wir unter Benutzung von Bemerkung 4.5 nach:

$$|z \cdot w|^2 = (zw)(\overline{zw}) = (z\overline{z})(w\overline{w}) = |z|^2 \cdot |w|^2$$

Nach Wurzelziehen auf beiden Seiten steht die Behauptung da.
c) Im Dreieck mit den Ecken 0, w und $z + w$ (siehe Abbildung 10) sind $a = |z|$, $b = |w|$ und $c = |z + w|$ die Längen der Seiten. Mit dem Cosinussatz 3.6 gilt

$$|z + w|^2 = c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \leq a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2 = (|z| + |w|)^2.$$

Durch Wurzelziehen auf beiden Seiten erhält man die Behauptung. ■

7:27.05.2015

Mit dem komplexen Betrag haben wir einen Begriff von Abstand, so dass wir wieder von Konvergenz von Folgen und Cauchyfolgen sprechen können. Man beachte, dass wir auf $\mathbb{C}$ im Gegensatz zu $\mathbb{R}$ keine Ordnung definiert haben (und auch keine definieren können, die die Rechenregeln für Ordnungen erfüllt). Anschaulich ist für $\varepsilon > 0$ (mit $\varepsilon \in \mathbb{R}$)

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \varepsilon\}, \qquad \text{bzw. } \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < \varepsilon\}$$

die Kreisscheibe mit Radius ε um 0, bzw. $a \in \mathbb{C}$. Die Definition von Konvergenz in $\mathbb{C}$ sieht genauso aus wie für $\mathbb{R}$: $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $z \in \mathbb{C}$, falls

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R} \,\text{mit}\, \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : |z_n - z| < \varepsilon\,.$$

Bemerkung 4.8 Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von komplexen Zahlen. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}\,(z_n) = \mathrm{Re}\,(z) \text{ und } \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}\,(z_n) = \mathrm{Im}\,(z).$$

und

$$(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist Cauchyfolge} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathrm{Re}\,(z_n))_{n\in\mathbb{N}},\ (\mathrm{Im}\,(z_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ sind Cauchyfolgen.}$$

Beweis: Zum Beweis benötigt man im Grunde nur die folgenden Ungleichungen. Für beliebiges $v \in \mathbb{C}$ gilt:

$$|\mathrm{Re}\,(v)| \leq |v|, \quad \mathrm{Im}\,(v) \leq |v|, \quad \text{und} \quad |v| \leq |\mathrm{Re}\,(v)| + |\mathrm{Im}\,(v)|.$$ ■

Aus der Bemerkung folgt sofort:

Proposition 4.9 $\mathbb{C}$ *ist vollständig.*

4.2 Polarkoordinaten

Sei $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Dann hat $w = \frac{1}{|z|} \cdot z$ Betrag 1, liegt also auf dem Einheitskreis. Damit gilt

$$w = \cos(\alpha) + \mathrm{i}\sin(\alpha)$$

für ein $\alpha \in \mathbb{R}$. Die komplexe Zahl z kann somit in *Polarkoordinatendarstellung* als

$$z = |z|(\cos(\alpha) + \mathrm{i}\sin(\alpha))$$

geschrieben werden. Der Winkel α heißt *Argument* von z, geschrieben $\alpha = \arg(z)$, und ist eindeutig bis auf Addition von ganzzahligen Vielfachen von 2π. Man kann $\arg(z)$ normieren, indem man $\arg(z) \in [0, 2\pi)$ wählt.
Wir kommen nun zur geometrischen Deutung der komplexen Multiplikation. Es seien

$$z = |z|(\cos(\alpha) + \mathrm{i}\sin(\alpha)), \quad w = |w|(\cos(\beta) + \mathrm{i}\sin(\beta)).$$

Dann gilt unter Zuhilfenahme der Additionstheoreme 3.3

$$\begin{aligned} z \cdot w &= |z| \cdot |w|(\cos(\alpha) + \mathrm{i}\sin(\alpha))(\cos(\beta) + \mathrm{i}\sin(\beta)) \\ &= |zw|(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + \mathrm{i}(\cos\alpha\sin\beta + \cos\beta\sin\alpha)) \\ &= |zw|(\cos(\alpha+\beta) + \mathrm{i}\sin(\alpha+\beta)) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Die Multiplikation von z mit einer komplexen Zahl w ist also eine Drehstreckung mit Winkel $\beta = \arg(w)$ und Streckfaktor $|w|$.

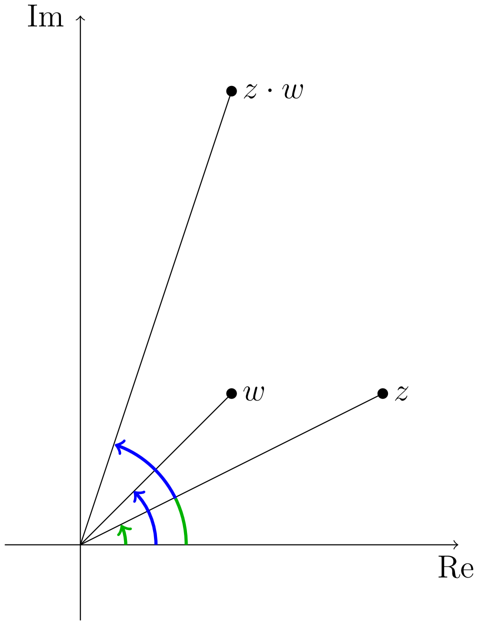

Abbildung 12: Komplexe Multiplikation geometrisch

4.3 Fundamentalsatz der Algebra.

Die komplexen Zahlen haben die schöne Eigenschaft, dass nun jede polynomielle Gleichung

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n = 0$$

mit $a_n \neq 0$ genau n Nullstellen hat – wenn man diese mit Vielfachheit zählt. Dies ist besagt der Fundamentalsatz der Algebra, den wir hier allerdings nur zitieren wollen.

Satz 4.10 (Fundamentalsatz der Algebra) *Es sei*

$$P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n$$

eine Polynomfunktion. Dann gibt es (nicht notwendig verschiedene) $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, *so dass*

$$P(z) = (z - \alpha_1) \cdots (z - \alpha_n)$$

gilt.

Insbesondere hat natürlich auch $z^2 = -1$ zwei Lösungen, nämlich i und $-$i. Genauso hat für $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung $z^n - 1 = 0$ genau n Lösungen, die man n-te *Einheitswurzeln* nennt. Mithilfe der Polarkoordinatendarstellung kann man diese leicht konstruieren. Wir setzen an, dass

$$w = |w|(\cos(\alpha) + \mathrm{i}\sin(\alpha)), \quad \alpha \in [0, 2\pi)$$

eine Lösung von $z^n = 1$ ist. Dann gilt also nach (4.1)

$$w^n = |w|^n(\cos(n\alpha) + \mathrm{i}(\sin(n\alpha)) = 1 = \cos(2\pi k) + \mathrm{i}\sin(2\pi k), \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

woraus $|w| = 1$ und $n\alpha = 2\pi k$, $(k \in \mathbb{Z})$ folgt. Damit sind die n Lösungen von $z^n - 1 = 0$ gegeben durch

$$w_k = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right), \qquad k = 0, \ldots, n-1.$$

Das sind für $n \geq 3$ genau die Eckpunkte des regelmäßigen n-Ecks auf dem Einheitskreis.

5 Exponentialfunktion und Logarithmus

In diesem Abschnitt wird eine weitere wichtige Funktion disktuiert, die Exponentialfunktion und ihre Umkehrfunktion, der Logarithmus. Diese spielen insbesondere bei der Modellierung von Wachstumsprozessen (z.B. Zinseszins, radioaktiver Zerfall, Wachstum von Bakterienkulturen, usw.) eine entscheidende Rolle. Zunächst erweiteren wir die Potenzfunktion von natürlichen, bzw. ganzen auf rationale und schließlich reelle Exponenten.

5.1 Potenzen mit rationalen Exponenten

Für beliebiges $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ definiert man

$$a^n = \underbrace{a \cdots a}_{n\text{-mal}}$$

bzw. induktiv durch $a^1 := a$ und $a^n = a \cdot a^{n-1}$, $n > 1$.
Diese Definition kann man auf ganzzahlige Exponenten bekanntlich folgendermaßen ausdehnen. Sei dazu $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ und $m \in \mathbb{Z}$. Dann definieren wir

$$a^m = \begin{cases} a^m, & \text{falls } m > 0 \\ 1, & \text{falls } m = 0 \\ \left(\frac{1}{a}\right)^{|m|}, & \text{falls } m < 0 \end{cases} .$$

Bemerkung 5.1 Für $a, b \neq 0$ und $m, n \in \mathbb{Z}$ sind dann die üblichen Rechenregeln

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n, \qquad (a^m)^n = a^{m \cdot n} = (a^n)^m, \qquad a^m b^m = (ab)^m$$

erfüllt.

Nach Beispiel 2.10 gibt es zu $a > 0$ und $m \in \mathbb{N}$ eine eindeutige positive Lösung $\sqrt[m]{a}$ von $x^m = a$. Wir definieren für $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$:

$$a^r := \sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p .$$

Die beiden Ausdrücke auf der rechten Seite sind in der Tat gleich, denn beide sind positive Lösungen der Gleichung $x^q = a^p$. Desweiteren ist die Definition auch unabhängig von der Darstellung von r als Bruch $\frac{p}{q}$, denn sei $r = \frac{p}{q} = \frac{s}{t}$, also $pt = qs$. Dann gilt $\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[t]{a^s}$, denn beides sind positive Lösungen von $x^t = a^s$:

$$(\sqrt[q]{a^p})^t = ((\sqrt[q]{a})^p)^t = (\sqrt[q]{a})^{p \cdot t} = (\sqrt[q]{a})^{q \cdot s} = ((\sqrt[q]{a})^q)^s = a^s.$$

Proposition 5.2 *Für reelle Zahlen $a, b > 0$ und $x, y \in \mathbb{Q}$ gilt:*

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \qquad (a^x)^y = a^{x \cdot y} = (a^y)^x, \qquad a^x \cdot b^x = (ab)^x.$$

BEWEIS: Wieder benötigt man die Eindeutigkeit der Lösung von $x^m = ab$, um zu zeigen: Für alle $a, b > 0$ und $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sqrt[m]{a}\,\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}.$$

Denn

$$(\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b})^m = (\sqrt[m]{a})^m \cdot (\sqrt[m]{b})^m = ab.$$

Seien nun $x = \frac{r}{s}$ und $y = \frac{t}{u}$. Dann gilt

$$a^{x+y} = a^{\frac{ru+ts}{su}} = \sqrt[su]{a^{ru+ts}} = \sqrt[su]{a^{ru}a^{ts}} = \sqrt[su]{a^{ru}} \cdot \sqrt[su]{a^{ts}} = \sqrt[s]{a^r} \cdot \sqrt[u]{a^t} = a^x \cdot a^y.$$

Genauso rechnet man die restlichen Gleichungen nach. ■

Lemma 5.3 *Für $a > 0$ und $r, s \in \mathbb{Q}$ mit $r < s$ gilt*

$$\begin{cases} a^r > a^s, & \text{falls } 0 < a < 1 \\ a^r < a^s, & \text{falls } a > 1 \end{cases}.$$

BEWEIS: Es reicht, den Fall $a > 1$ zu betrachten, denn der andere ergibt sich durch Ersetzen von a durch a^{-1}. Ist $r < s$, also $0 < s - r = \frac{u}{v}$ mit $u, v \in \mathbb{N}$, so gilt, da $a \mapsto a^u$ und $a \mapsto \sqrt[v]{a}$ streng monoton wachsend sind:

$$1 < a \quad \Rightarrow \quad 1 < \sqrt[v]{a} \quad \Rightarrow \quad 1 < (\sqrt[v]{a})^u = a^{u/v} = a^{s-r}$$

und damit nach Multiplikation mit $a^r > 0$ auch $a^r < a^s$. ■

5.2 Potenzen mit reellen Exponenten

Um allgemein a^x für reelle Exponenten x zu definieren, liegt es nahe, x durch eine Folge von rationale Zahlen r_n zu approximieren und a^x als Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a^{r_n}$ zu definieren. Damit dies sinnvoll ist, müssen wir zeigen, dass der Grenzwert existiert und dass er nicht von der gewählten Folge $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abhängt.
Sei $a > 1$, $x \in \mathbb{R}$ und $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge mit $r_n \in \mathbb{Q}$ und $r_n \to x$ $(n \to \infty)$. Dann ist wegen Lemma 5.3 $(a^{r_n})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und beschränkt und konvergiert damit nach dem Monotoniekriterium 1.28. Für $a < 1$ wählen wir entsprechend eine monoton fallende Folge $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $r_n \in \mathbb{Q}$ und $r_n \to x$ $(n \to \infty)$. $(a^{r_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert dann aus dem gleichen Grund.
Ist $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere (beliebige) Folge mit $s_n \in \mathbb{Q}$ und $s_n \to x$ $(n \to \infty)$, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} a^{s_n} = \lim_{n\to\infty} a^{s_n - r_n} a^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}$$

genau dann, wenn $a^{s_n - r_n} \to 1$ $(n \to \infty)$ gilt. Da $(s_n - r_n) \to 0$ $(n \to \infty)$, bleibt zu zeigen, dass für jede rationale Nullfolge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge $(a^{t_n})_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to \infty$ gegen 1 konvergiert. Dies folgt aus Teil b) des folgenden Lemmas.

Lemma 5.4 *a) Für $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ gilt: $\sqrt[n]{a} \to 1$ für $n \to \infty$.*

b) Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $r \in \mathbb{Q}$ mit $|r| < \delta$ gilt: $|a^r - 1| < \varepsilon$.

01.06.2015

Beweis: a) Wir unterscheiden die Fälle $a > 1$ und $0 < a < 1$ und behandeln zunächst $a > 1$. Dann ist $\sqrt[n]{a} > 1$ nach Lemma 5.3. Wir schreiben $\sqrt[n]{a} = 1 + h_n$ mit $h_n > 0$. Nach der Bernoulli-Ungleichung 1.7 gilt

$$a = (\sqrt[n]{a})^n = (1 + h_n)^n > 1 + nh_n$$

und damit $0 < h_n < \frac{a-1}{n}$. Der hintere Ausdruck geht für $n \to \infty$ gegen 0, also auch $h_n \to 0$ $(n \to \infty)$, woraus

$$\sqrt[n]{a} = 1 + h_n \to 1 \quad (n \to \infty)$$

folgt. Für $0 < a < 1$ ist $\frac{1}{a} > 1$, also

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} \to 1 \quad (n \to \infty).$$

b) Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es nach a) ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a^{1/N} - 1| < \varepsilon \qquad \text{und} \qquad |a^{-1/N} - 1| < \varepsilon$$

gilt. Wir wählen $\delta = \frac{1}{N}$. Dann gilt für $-\frac{1}{N} < r < \frac{1}{N}$ und $a > 1$

$$1 - \varepsilon < a^{-1/N} < a^r < a^{1/N} < 1 + \varepsilon$$

und damit $|a^r - 1| < \varepsilon$. Für $0 < a < 1$ ersetzt man r durch $-r$. ∎

Definition 5.5 *Sei $x \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Dann definieren wir*

$$a^x := \lim_{n \to \infty} a^{r_n}$$

wobei $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge mit $r_n \in \mathbb{Q}$ und $r_n \to x$ $(n \to \infty)$ ist. Desweiteren definieren wir $0^x := 0$ für $x > 0$.
Die Funktion

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto a^x$$

heißt Exponentialfunktion (zur Basis a). Ist speziell $a = e$, die Euler'sche Zahl, so schreiben wir

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \exp(x) = e^x.$$

Proposition 5.6 *Sei $a > 0$, $a \neq 1$.*

a) Die Exponentialfunktion zur Basis a ist stetig, streng monoton wachsend (bzw. fallend) für $a > 1$ (bzw. $a < 1$) und ihr Bild ist $(0, \infty)$.

b) Für $x, y \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ gelten

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \qquad (a^x)^y = a^{xy}.$$

Beweis: a) Wir zeigen zunächst die Monotonie. Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$. Dann gibt es rationale Zahlen $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{Q}$ mit $x < \rho_1 < \rho_2 < y$. Ist nun $x = \lim_{n\to\infty} r_n$ mit $r_n \in \mathbb{Q}$ und ohne Einschränkung $r_n < \rho_1$ und $y = \lim_{n\to\infty} s_n$ mit $s_n \in \mathbb{Q}$ und ohne Einschränkung $s_n > \rho_2$, so gilt für $a > 1$ wegen Lemma 5.3 und der Rechenregeln für Grenzwerte 1.11

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} \leq a^{\rho_1} < a^{\rho_2} \leq \lim_{n\to\infty} a^{s_n} = a^y.$$

Für $a \in (0,1)$ drehen sich alle Ungleichungen in der letzten Formel um.
Für die Stetigkeit reicht es nach Proposition 2.6 zu zeigen: Für jede Folge (x_n) von *reellen* Zahlen mit $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ gilt $a^{x_n} \to a^x$ $(n \to \infty)$. Dazu wählt man Folgen von rationalen Zahlen (r_n), (s_n) mit demselben Grenzwert x und $r_n \leq x_n \leq s_n$. Dann gilt für $a > 1$:

$$a^{r_n} \leq a^{x_n} \leq a^{s_n}$$

und die rechte und linke Seite konvergiert gegen a^x, also auch a^{x_n}. Für $a \in (0,1)$ dreht sich die letzte Ungleichung um.
Sei $a > 1$ und sei y im Bild der Exponentialfunktion, also $y = a^x$ für ein $x \in \mathbb{R}$. Wir wählen $r < x$ mit $r \in \mathbb{Q}$. Dann ist $0 < a^r < a^x$, also $y > 0$. Sei umgekehrt $y \in (0, \infty)$. Da $a > 1$ gilt, gibt es nach Beispiel 1.8 6) ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a^n > y$ und $a^{-n} = \frac{1}{a^n} < y$. Wegen des Zwischenwertsatzes gibt es dann auch $x \in [-n, n]$ mit $a^x = y$. Ein ähnliches Argument liefert die Behauptung auch für $a \in (0,1)$.
b) Die Formeln folgen aus den entsprechenden Formeln für rationale Exponenten und der Stetigkeit von $x \mapsto a^x$. ■

5.3 Logarithmus

Sei $a > 0$. Da die Exponentialfunktion $x \mapsto a^x$ streng monoton (wachsend, bzw. fallend) ist, gibt es eine Umkehrfunktion, genannt $\log_a$, der *Logarithmus zur Basis* a

$$\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto y = \log_a(x), \quad \text{mit } a^y = x.$$

Insbesondere gilt $\log_a(1) = 0$.

Proposition 5.7 *Für $a > 1$ (bzw. $a \in (0,1)$) ist die Funktion $\log_a$ stetig, streng monoton wachsend (bzw. fallend) und es gilt*

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y) \qquad \text{für alle } x, y \in (0, \infty)$$
$$\log_a(x^y) = y \log_a(x) \qquad \text{für alle } x \in (0, \infty), y \in \mathbb{R}$$

Insbesondere folgt direkt aus der zweiten Regel $\log_a(y^{-1}) = -\log_a(y)$ und damit $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x \cdot y^{-1}) = \log_a(x) - \log_a(y)$ für alle $x, y \in (0, \infty)$.

Beweis: Die Stetigkeit und strenge Monotonie folgt direkt aus Proposition 2.16 und Proposition 5.6. Die Rechengesetze folgen aus den entsprechenden für die Exponentialfunktion: z.B. ist

$$a^{\log_a(xy)} = xy = a^{\log_a(x)} \cdot a^{\log_a(y)} = a^{\log_a(x)+\log_a(y)}$$

also $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$. ∎

Notation 5.8 *Wir bezeichnen mit* log *(oder auch* ln *für logarithmus naturalis) den* natürlichen Logarithmus $\log_e$ *zur Basis* e*.*

Warum dieser "natürlich" ist, werden wir im nächsten Abschnitt sehen. Wir halten zunächst fest, dass alle anderen Logarithmus-Funktionen proportional zu dieser festen sind. Genauer gilt für $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$:

$$\log_e(x) = \log_e(a^{\log_a(x)}) = \log_a(x)\log_e(a),$$

also

$$\log_a(x) = \frac{\log_e(x)}{\log_e(a)}.$$

Damit ist eine beliebige Logarithmus-Funktionen proportional zu einer festen. Desweiteren gilt:

$$a^x = e^{x\log(a)} \qquad \text{für } a > 0, a \neq 1, x \in \mathbb{R}\,.$$

6 Das Integral

Der Flächeninhalt von geometrischen Figuren, z.B. Polygonen ist meist elementar berechenbar. Wie bestimmt man aber den Flächeninhalt einer beliebigen Fläche? Der einfachste Fall ist der Flächeninhalt der vom Funktionsgraph einer Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit der x-Achse eingeschlossen wird. Die Idee ist – ähnlich wie bei der Bestimmung des Kreisumfangs – den Flächeninhalt z.B. durch die Summe der Flächeninhalte geeigneter Rechtecke anzunähern.
Diese Idee wird uns auf das Integral einer Funktion führen, das allerdings im Allgemeinen einen orientierten Flächeninhalt angibt. Die Fläche oberhalb der x-Achse wird positiv, die Fläche unterhalb negativ gezählt.

Definition 6.1 *Sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine Funktion. Zu einer Unterteilung*

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

von $[a, b]$ *in* $n \in \mathbb{N}$ *Teilintervalle* $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, \ldots, n-1)$ *und Zwischenpunkten* $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ *definieren wir die* Riemann-Summe

$$S_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i).$$

Außerdem sei $\Delta_n = \max\big\{(x_{i+1} - x_i) \mid i = 0, \ldots, n-1\big\}$ *das Maximum aller Intervalllängen.*

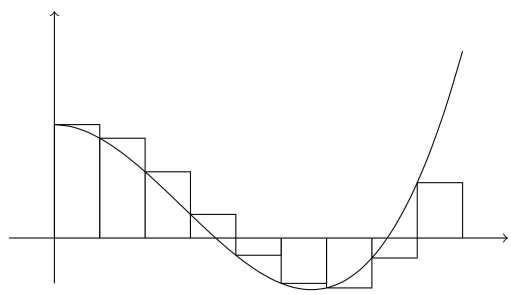

Abbildung 13: Integral als Approximation durch Riemann-Summen

Satz 6.2 *Sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion. Dann existiert das Integral*

$$\int_a^b f\,dx \in \mathbb{R},$$

definiert als der Grenzwert für $n \to \infty$ *einer beliebigen*[11] *Folge von Riemann-Summen* $S_n(f)$*, für die* $\Delta_n \to 0$ $(n \to \infty)$ *gilt.*

[11]insbesondere ist die Wahl der x_i und ξ_i beliebig

Diesen Satz wollen wir nicht beweisen. Die Notation geht auf Leibniz zurück: Das $\int$ ist eine Abwandlung des Summenzeichens $\sum$ und das dx am Ende erinnert daran, dass man die Länge der Intervalle $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ infinitesimal klein macht.
Als Aufwärmübung wollen wir zwei einfache Funktionen integrieren:

Beispiel 6.3 (1) Sei $c \in \mathbb{R}$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto c$ die konstante Funktion. Geometrisch soll der orientierte Flächeninhalt dann natürlich gleich $c(b-a)$ sein. In der Tat gilt für jede Riemann-Summe

$$S_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} c(x_{i+1} - x_i) = c \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = c(b-a).$$

(2) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ die Identität auf $[a, b]$. Geometrisch ist der Flächeninhalt dann gleich

$$\tfrac{1}{2}b^2 - \tfrac{1}{2}a^2.$$

Wir wählen als Unterteilung die Punkte $x_k = a + kh$ mit $h = \frac{b-a}{n}$ und als $\xi_k = x_k$. Dann gilt

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} (a + kh)h = nah + h^2 \sum_{k=1}^{n-1} k$$

Wegen

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

gilt

$$S_n(f) = a(b-a) + \tfrac{1}{2}(n(n-1))h = ab - a^2 + \tfrac{1}{2}(b-a)^2(1 - \tfrac{1}{n})$$

und damit im Grenzwert

$$\int_a^b x dx = \lim_{n\to\infty} ab - a^2 + \tfrac{1}{2}(b-a)^2(1 + \tfrac{1}{n}) = \tfrac{1}{2}b^2 - \tfrac{1}{2}a^2.$$

Proposition 6.4 *Sei D ein Intervall und $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig. Weiter seien $a, b, c \in D$ mit $a \leq b \leq c$.*

a)

$$\int_a^b f\,dx + \int_b^c f\,dx = \int_a^c f\,dx \quad \textit{und} \quad \int_a^a f\,dx = 0.$$

b) Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) dx = \lambda \int_a^b f\,dx + \mu \int_a^b g\,dx.$$

Beweis: a) Sei $S_n(f)$ eine Riemann-Summe für f auf $[a,b]$ und $T_n(f)$ eine Riemann-Summe für f auf $[b,c]$. Dann ist $S_n(f)+T_n(f)$ eine Riemann-Summe für f auf $[a,c]$. Lässt man $n \to \infty$ gehen, so folgt die Behauptung aus Proposition 1.11.
Die zweite Gleichung folgt aus der ersten für $a = b = c$.
b) Es gilt

$$\begin{aligned} S_n(\lambda f + \mu g) &= \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda f(\xi_k) + \mu g(\xi_k))(x_{k+1} - x_k) \\ &= \lambda \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) + \mu \sum_{k=0}^{n-1} g(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) = \lambda S_n(f) + \mu S_n(g) \end{aligned}$$

Für $n \to \infty$ konvergiert die linke Seite gegen $\int_a^b (\lambda f + \mu g) dx$ und die rechte Seite gegen $\lambda \int_a^b f\, dx + \mu \int_a^b g\, dx$. ■

Die Rechenregel a) hat insbesondere zur Folge, dass wir für $a < b$

$$\int_b^a f\, dx := -\int_a^b f\, dx$$

definieren.

6.1 Das Integral als Mittel

Das arithmetische Mittel einer Funktion f an n Punkten

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n$$

ist bekanntlich definiert als

$$M_n(f) = \tfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k).$$

Das Integral stellt ebenfalls eine Art Mittel der Funktion f auf dem Intervall $[a,b]$ dar. Um den Zusammenhang herzustellen, nehmen wir an, dass die Intervalle $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 1, \ldots, n-1$ alle gleich lang sind, und setzen $a = x_1$, $b = x_n$. Dann können wir $M_n(f)$ als Riemann-Summe

$$\frac{1}{b-a} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \frac{b-a}{n}.$$

auffassen[12]. Für $n \to \infty$ konvergiert diese gegen $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f\, dx$.
Der Mittelwertsatz der Integralrechnung besagt, dass das Mittel μ auch als Funktionswert angenommen wird.

[12]Genau genommen ist $\frac{1}{b-a} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \frac{b-a}{n-1} \frac{n-1}{n}$ eine Riemann-Summe, aber wegen $\frac{n-1}{n} \to 1$ für $(n \to \infty)$ verschwindet der Unterschied im Grenzwert.

Satz 6.5 (Mittelwertsatz der Integralrechnung) *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es ein $\xi \in [a, b]$, so dass*

$$\int_a^b f\,dx = (b-a)f(\xi)$$

gilt.

9:08.06.2015

Lemma 6.6 *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$. Dann ist*

$$(b-a)m \leq \int_a^b f\,dx \leq (b-a)M.$$

Beweis: Für jede Riemann-Summe von f gilt

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) \geq \sum_{k=0}^{n-1} m(x_{k+1} - x_k) = m(b-a)$$

und analog

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) \leq \sum_{k=0}^{n-1} M(x_{k+1} - x_k) = M(b-a).$$

Mit den Rechenregeln für Grenzwerte 1.11 folgt die Behauptung. ■

Beweis: Nach Proposition 2.13 gibt es $x_{\min}$ und $x_{\max} \in [a, b]$ mit $f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max})$ für alle $x \in [a, b]$. Nach Lemma 6.6 gilt

$$f(x_{\min}) \leq \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f\,dx \leq f(x_{\max})$$

und nach dem Zwischenwertsatz 2.9 gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f\,dx$. Daraus folgt die Behauptung. ■

6.2 Das Integral als Funktion

Sei D ein Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Anstatt für festes $a, b \in D$ das Integral $\int_a^b f\,dx$ zu betrachten, können wir auch eine, z.B. die obere Grenze variieren lassen. Wir erhalten dann (für jedes fest gewählte $a \in D$) eine Funktion

$$\phi_a : D \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \int_a^x f\,dx.$$

Mit dem Integral können wir also aus einer Funktion f eine neue Funktion ϕ_a definieren.

Was ändert sich an der erhaltenen Funktion ϕ_a, wenn wir eine andere untere Grenze $\tilde{a} \in D$ wählen? Wir bilden die Differenz

$$\phi_a(x) - \phi_{\tilde{a}}(x) = \int_a^x f\,dx - \int_{\tilde{a}}^x f\,dx = \int_a^x f\,dx + \int_x^{\tilde{a}} f\,dx = \int_a^{\tilde{a}} f\,dx$$

Also gilt

$$\phi_a(x) = \phi_{\tilde{a}}(x) + C$$

mit der Konstanten $C = \int_a^{\tilde{a}} f\,dx \in \mathbb{R}$. Für eine andere Wahl von a erhalten wir also eine um eine Konstante verschobene Funktion.
Mithilfe des Mittelwertsatzes der Integralrechnung 6.5 kann man zeigen, dass der orientierte Flächeninhalt unterhalb einer Funktion stetig von der (oberen) Grenze abhängt.

Proposition 6.7 *Die Funktion* $\phi_a : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_a^x f\,dx$ *ist stetig.*

Beweis: Seien $x, y \in D$. Dann gilt

$$|\phi_a(x) - \phi_a(y)| = |\int_a^x f\,dx - \int_a^y f\,dx| = |\int_y^x f\,dx| = |x-y| \cdot |f(\xi)|$$

mit ξ zwischen x und y. Wir wollen nun die Stetigkeit von ϕ_a in $x \in D$ zeigen. Es gibt ein $\delta' > 0$, so dass das abgeschlossene Intervall $I = [x-\delta', x+\delta']$ ganz in D liegt, und auf diesem Intervall ist f beschränkt nach Proposition 2.13, also $|f(\xi)| < M$ für ein $M > 0$ und alle $\xi \in I$. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ wählen wir nun $\delta > 0$ mit $\delta < \varepsilon/M$ und $\delta < \delta'$. Dann gilt für $y \in D$ mit $|x-y| < \delta$:

$$|\phi_a(x) - \phi_a(y)| \leq |x-y| \cdot |f(\xi)| \leq \delta \cdot M < \varepsilon/M \cdot M = \varepsilon,$$

wobei wir benutzt haben, dass wegen $|x-\xi| \leq |x-y| < \delta$ gilt: $\xi \in I$. Damit ist ϕ_a im Punkt x stetig. ∎

7 Die Ableitung

Wie ändert sich der orientierte Flächeninhalt, wenn man die obere Integrationsgrenze verändert? Wir gehen dazu wieder von einer stetigen Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall D aus und vergleichen (für $a \in D$ fest gewählt)

$$\phi_a(x) = \int_a^x f\,dx \quad \text{und} \quad \phi_a(x+h) = \int_a^{x+h} f\,dx$$

mit $h > 0$. Die mittlere Änderungsrate von ϕ_a auf dem Intervall $[x, x+h]$

$$\frac{\phi_a(x+h) - \phi_a(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f\,dx$$

Die momentane Änderungsrate im Punkt x erhalten wir, indem wir $h \to 0$ gehen lassen, also den Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{\phi_a(x+h) - \phi_a(x)}{h}$$

bilden.
Was bedeutet $\lim_{h\to 0}$ aber eigentlich überhaupt? Wir können diesen Grenzübergang wieder mithilfe von Folgen definieren:

Definition 7.1 *Sei D ein Intervall, $x_0 \in D$ und $f : D \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ eine auf $D \setminus \{x_0\}$ definierte Funktion. Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann schreiben wir*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \qquad \textit{oder} \qquad f(x) \to a \textit{ für } x \to x_0$$

falls gilt: Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in D \setminus \{x_0\}$ $(n \in \mathbb{N})$ und $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$.

Insbesondere ist nach dem Folgenkriterium für Stetigkeit 2.6 f genau dann stetig in x_0, wenn $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt.
Da wir den Grenzwert $\lim_{x\to x_0}$ durch den Grenzwert von Folgen definiert haben, gelten für das Rechnen damit die gleichen Regeln wie für Grenzwerte von Folgen, die wir in Proposition 1.11 zusammengefasst haben. Hier ist noch einmal eine Übersicht darüber.

Bemerkung 7.2 Falls $\lim_{x\to x_0} f(x)$ und $\lim_{x\to x_0} g(x)$ existieren, so gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} f(x) + g(x) &= \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) && \\
\lim_{x\to x_0} c \cdot f(x) &= c \cdot \lim_{x\to x_0} f(x) && \text{für alle } c \in \mathbb{R} \\
\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} && \text{falls } \lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0
\end{aligned}$$

Genauso wie für ϕ_a können wir für allgemeine Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ die mittlere und momentane Änderungsrate studieren.

Definition 7.3 *Sei D ein Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$. Falls der Grenzwert*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

existiert, so heißt f in x_0 differenzierbar. f heißt auf D differenzierbar*, falls f in jedem Punkt $x_0 \in D$ differenzierbar ist. In diesem Fall erhält man eine Funktion*

$$D \to \mathbb{R}, \qquad x_0 \mapsto f'(x_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

genannt die Ableitung von f*.*

Ersetzt man $h = x - x_0$, so kann man obigen Grenzwert anders schreiben als

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Der Ausdruck $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, bzw. $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ über den der Limes hier gebildet wird, heißt *Differenzenquotient.*

Beispiel 7.4 (1) Die Ableitung der konstanten Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = c$ ($c \in \mathbb{R}$) ist $f' \equiv 0$. In der Tat gilt für jedes $x_0 \in [a,b]$:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{c-c}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} 0 = 0,$$

also $f'(x_0) = 0$.

(2) Die Ableitung von $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ ist $f' \equiv 1$. Denn für jedes $x_0 \in [a,b]$ gilt

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x-x_0}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} 1 = 1,$$

also $f'(x_0) = 1$.

(3) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ ist in 0 nicht differenzierbar. Um dies zu zeigen, wählt man die Folge $x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$. Dann gilt $x_n \to 0$. Setzt man diese Folge in den Differenzenquotient ein, so erhält man:

$$\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n - 0} = \frac{|(-1)^n \frac{1}{n}|}{(-1)^n \frac{1}{n}} = (-1)^{-n} = (-1)^n.$$

Diese Folge konvergiert aber nicht. Damit existiert der Grenzwert $\lim_{x\to 0} \frac{|x|-|0|}{x-0}$ nicht, und f ist in 0 nicht differenzierbar.

Entsteht eine Funktion durch Summe, Produkt oder Hintereinanderausführung von weiteren Funktionen, so kann man die Ableitung gemäß der folgenden Liste von Rechenregeln bestimmen.

Proposition 7.5 *Sei D ein Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : D \to \mathbb{R}$ auf D differenzierbare Funktionen.*

a) Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $D \to \mathbb{R}, x \mapsto \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot g(x)$ differenzierbar und es gilt

$$(\lambda \cdot f + \mu \cdot g)' = \lambda \cdot f' + \mu \cdot g'.$$

b) (Produktregel) Die Funktion $D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) \cdot g(x)$ ist differenzierbar und es gilt

$$(f \cdot g)' = f \cdot g' + f' \cdot g$$

Beweis: a) ergibt sich direkt aus den Rechenregeln 1.11 für Grenzwerte von Folgen. Für b) schreiben wir den Differenzenquotienten um zu

$$\begin{aligned} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f(x)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + g(x_0)\frac{f(x) - f(x_0}{x - x_0} \end{aligned}$$

Differenzierbare Funktionen sind stetig, wie wir gleich noch beweisen werden. Aus der Stetigkeit von f folgt deshalb

$$\lim_{x \to x_0} f(x)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

und der zweite Summand geht für $x \to x_0$ gegen $g(x_0) \cdot f'(x_0)$. Damit haben wir die Behauptung gezeigt. ∎

Bemerkung 7.6 Differenzierbare Funktionen sind stetig. Denn ist f in x_0 differenzierbar, so gilt

$$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| \cdot \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|}$$

Der erste Term geht gegen 0 für $x \to x_0$ und der zweite gegen $f'(x_0)$, also gilt $f(x) \to f(x_0)$ für $x \to x_0$, was genau die Aussage ist, dass f in x_0 stetig ist.

Beispiel 7.7 Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Ableitung von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$ ist $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto n \cdot x^{n-1}$. Wir zeigen dies durch Induktion nach n. Für $n = 1$ ist die Aussage genau die von Beispiel 7.4 (2). Sei die Aussage bereits für $n \in \mathbb{N}$ gezeigt. Dann gilt nach der Produktregel

$$(x^{n+1})' = (x \cdot x^n)' = (x)' \cdot x^n + x \cdot (x^n)' = x^n + x \cdot nx^{n-1} = (n+1)x^n.$$

Damit haben wir den Induktionsschluss gezeigt.

Proposition 7.8 (Kettenregel) *Seien D_f und D_g Intervalle und $f : D_f \to \mathbb{R}$ und $g : D_g \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D_f) \subset D_g$, so dass also $g \circ f : D_f \to \mathbb{R}$ definiert ist. Dann ist $g \circ f$ differenzierbar und es gilt*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

10:15.06.2015

Beweis: Falls $f'(x_0) \neq 0$, so gilt für x nahe bei x_0 aber $x \neq x_0$:

$$|f(x) - f(x_0)| = \underbrace{|x - x_0|}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right|}_{\neq 0},$$

also $f(x) - f(x_0) \neq 0$. Damit können wir den Differenzenquotienten von $g \circ f$ umschreiben als

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Wegen der Stetigkeit von f geht für $x \to x_0$ der erste Ausdruck gegen $g'(f(x_0))$ und der zweite konvergiert natürlich gegen $f'(x_0)$.
Falls $f'(x_0) = 0$, so folgt wegen

$$|g(y) - g(y_0)| = |y - y_0| \cdot \left|\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}\right| \leq M|y - y_0|$$

für ein $M > 0$ (da der Differenzenquotient konvergiert und deshalb beschränkt ist), dass

$$\left|\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0}\right| \leq M \cdot \left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right|.$$

Letzterer Term geht für $x \to x_0$ gegen $f'(x_0) = 0$. Damit ist $g \circ f$ in x_0 differenzierbar, mit Ableitung $0 = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$. ■

Proposition 7.9 (Quotientenregel) *Sei D ein Intervall und $f, g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Ist $g \not\equiv 0$, dann ist $\frac{f}{g} : D' \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ (mit $D' = \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$) differenzierbar und es gilt*

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}.$$

Beweis: Wir kombinieren die Kettenregel mit der Produktregel: $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$. Die Funktion $\frac{1}{g}$ ist die Hintereinanderausführung $h \circ g$ von $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ und g. Die Ableitung von h in $x_0 \neq 0$ ist gegeben durch

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{x_0 - x}{x \cdot x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} -\frac{1}{x \cdot x_0} = -\frac{1}{x_0^2}.$$

Also ist $h'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Damit ist nach der Kettenregel

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{1}{g^2} \cdot g'$$

und insgesamt erhält man

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f'\frac{1}{g} + f\left(\frac{1}{g}\right)'\right) = \frac{f'}{g} - \frac{fg'}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

■

Beispiel 7.10 Mit den obigen Regeln können wir alle Polynomfunktionen und alle rationalen Funktionen ableiten. Für

$$f : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x^5}{2x-2}$$

ist zum Beispiel

$$f'(x) = \frac{(x^5)'(2x-2) - x^5(2x-2)'}{(2x-2)^2} = \frac{5x^4(2x-2) - 2x^5}{(2x-2)^2} = \frac{4x^5 - 5x^4}{2(x-1)^2}.$$

7.1 Die Ableitungen von Sinus, Cosinus und der Exponentialfunktion

Wir möchten nun die Ableitungen möglichst aller uns bekannten Funktionen bestimmen, sofern sie differenzierbar sind. Für Polynomfunktionen und rationale Funktionen ergibt sich die Ableitung aus den Regeln des vorigen Abschnitts. Für sin, cos und exp und log müssen wir noch etwas arbeiten. Nützlich ist dabei folgende Regel für die Bestimmung von Grenzwerten.

Lemma 7.11 (Sandwich von Limites) *Sei D ein Intervall und $x_0 \in D$. Seien $f, g, h : D \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ Funktionen, so dass gilt*

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \qquad \text{für alle} \;\; x \in D \setminus \{x_0\}.$$

Falls $\lim_{x\to x_0} f(x)$ und $\lim_{x\to x_0} g(x)$ existieren und gleich sind, dann existiert auch

$$\lim_{x\to x_0} h(x)$$

und $\lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)$.

Beweis: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge mit $x_n \in D \setminus \{x_0\}$ und $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ und sei $a = \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)$. Sei $\varepsilon > 0$. Da $f(x_n) \to a$ und $g(x_n) \to a$ für $n \to \infty$ gilt, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für $n \geq N$ gilt: $f(x_n), g(x_n) \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Wegen $f(x_n) \leq h(x_n) \leq g(x_n)$ liegt dann auch $h(x_n) \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ für $n \geq N$. Also folgt $h(x_n) \to a$. ■

Proposition 7.12 *Es gilt* $\sin' = \cos$ *und* $\cos' = -\sin$.

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass sin und cos beide in $x_0 = 0$ differenzierbar sind. Wegen $\frac{\sin(x)}{x} \le 1$ und $\frac{\tan(x)}{x} \ge 1$ (vgl. Lemma 3.4) gilt:

$$\cos(x) \le \frac{\tan(x)}{x}\cos(x) = \frac{\sin(x)}{x} \le 1.$$

Für $x \to 0$ geht $\cos(x) \to 1$, also ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 = \sin'(0).$$

Genauso folgt mit Lemma 3.4 aus $1 \ge \cos(x) \ge 1 - \frac{x^2}{2}$:

$$\begin{cases} 0 \ge \frac{\cos(x)-1}{x} \ge -\frac{x}{2} & , \quad x > 0 \\ 0 \le \frac{\cos(x)-1}{x} \le -\frac{x}{2} & , \quad x < 0 \end{cases}$$

und damit

$$\cos'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - \cos(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0.$$

Sei nun $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h} &= \frac{\sin(x_0)\cos(h) + \cos(x_0)\sin(h) - \sin(x_0)}{h} \\ &= \sin(x_0)\underbrace{\frac{\cos(h) - 1}{h}}_{\to 0} + \cos(x_0)\underbrace{\frac{\sin(h)}{h}}_{\to 1} \to \cos(x_0) \end{aligned}$$

für $h \to 0$. Also ist $\sin' = \cos$. Da $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ ist, ist cos ebenfalls differenzierbar und mit der Kettenregel gilt:

$$(\cos(x))' = (\sin(x + \tfrac{\pi}{2}))' = \sin'(x + \tfrac{\pi}{2}) \cdot 1 = \cos(x + \tfrac{\pi}{2}) = -\sin(x),$$

denn die innere Ableitung von $x \mapsto x + \frac{\pi}{2}$ ist konstant gleich 1. ∎

Proposition 7.13 *Für* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^x$ *gilt:* $\exp' = \exp$.

Lemma 7.14 *Für* $x \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$e^x = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Beweis: Für $x = 0$ ist die Aussage klar. Sei zunächst $x > 0$. Dann gibt es $k_n \in \mathbb{N}$ mit $k_n \le \frac{n}{x} < k_n + 1$, also

$$\frac{1}{k_n} \ge \frac{x}{n} > \frac{1}{k_n + 1}.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1} &\leq \left(1+\frac{x}{n}\right)^{k_n+1} \leq \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n/x}\cdot\left(1+\frac{x}{n}\right)\\ &\leq \left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{n/x}\left(1+\frac{x}{n}\right) \leq \left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n}\left(1+\frac{1}{k_n}\right)\left(1+\frac{x}{n}\right)\end{aligned}$$

Für $n \to \infty$ geht auch $k_n \to \infty$ und damit

$$\left(1+\frac{x}{n}\right) \to 1, \qquad \left(1+\frac{1}{k_n}\right) \to 1,$$

und

$$\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1} \to e, \qquad \left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n} \to e.$$

Damit folgt $\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n/x} \to e$ für $n \to \infty$, also wegen der Stetigkeit von exp

$$e^x = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n/x}\right)^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

Für $x < 0$ folgt die Aussage aus $e^x = (e^{-x})^{-1}$ und

$$e^{-1} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n.$$

Für letztere Gleichung benutzt man, dass

$$\begin{aligned}e^{-1} &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\underbrace{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-1}}_{\to 1} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n.\end{aligned}$$

gilt. ∎

Beweis (von Proposition 7.13): Wir zeigen zunächst die Differenzierbarkeit in $x_0 = 0$. Sei $x \in \mathbb{R}$ nahe bei 0, also insbesondere $x > -1$. Die Bernoulli-Ungleichung 1.7 besagt:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq 1+x$$

Also gilt nach Lemma 7.14

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq 1+x.$$

Andererseits ist (zumindest für $0 \le x < 1$)

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n &= 1 + n\frac{x}{n} + \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2 + \ldots + \frac{n\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{x}{n}\right)^k + \ldots + \left(\frac{x}{n}\right)^n \\ &= 1 + x + x^2\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \ldots + x^k\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \ldots + x^n \\ &\le \sum_{k=0}^n x^k \le \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1}{1-x}.\end{aligned}$$

wobei wir die Formel für die Geometrische Reihe 1.10 benutzt haben. Damit ist $e^x \le \frac{1}{1-x}$ für $x \ge 0$. Insgesamt folgt

$$1 - x \le e^x \le \frac{1}{1-x}, \qquad \text{für } 0 \le x < 1.$$

Durch Bilden der Kehrwerte folgt

$$\frac{1}{1-x} \ge e^{-x} \ge 1 - x.$$

Ersetzt man nun $y = -x$, so sieht man, dass für $-1 < y \le 0$ gilt

$$\frac{1}{1+y} \ge e^y \ge 1 + y.$$

Insgesamt folgt also für alle $|x| < 1$, $x \ne 0$:

$$\frac{1+x-1}{x} \le \frac{e^x - 1}{x} \le \frac{\frac{1}{1-x} - 1}{x} = \frac{1}{1-x}$$

Für $x \to 0$ geht die linke und rechte Seite gegen 1, also gilt

$$\exp'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{\exp(x) - \exp(0)}{x - 0} = 1$$

Für beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$ folgt die Differenzierbarkeit folgendermaßen:

$$\exp'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{\exp(x_0+h) - \exp(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\exp(x_0)\frac{\exp(h)-1}{h} = \exp(x_0). \qquad \blacksquare$$

7.2 Die Ableitung als lokale Linearisierung

Neben der Interpretation als momentane Änderungsrate wollen wir eine weitere Interpretation der Ableitung einer Funktion diskutieren, die der lokalen Linearisierung. Die einfachsten nichtkonstanten Funktionen sind von der Form

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto ax + b$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ und heißen affin-lineare Funktionen.
Mithilfe der Ableitung kann man eine differenzierbare Funktion in der Nähe von x_0 durch eine affin-lineare Funktion darstellen – zumindest bis auf einen kleinen Fehler: Sei $D = (a, b)$ und $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf D und $x_0 \in D$. Wir setzen

$$\varphi(h) := f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot h$$

wobei h aus einem Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$ um 0 sein muss, das so klein ist, dass $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ ganz in D liegt.
Dann gilt für $h \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \varphi(h),$$

f wird also um x_0 näherungsweise durch die affin-lineare Funktion

$$(-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}, \qquad h \mapsto f(x_0) + f'(x_0)h$$

beschrieben. Für den Fehler $\varphi(h)$ gilt nicht nur $\varphi(h) \to 0$ für $h \to 0$, sondern sogar

$$\frac{\varphi(h)}{h} \to 0 \quad \text{für } h \to 0.$$

Mittels der Linearisierung erhält man eine notwendige Bedingung dafür, dass eine Funktion in einem Punkt ein lokales Maximum oder Minimum hat.

Definition 7.15 *Es sei D ein Intervall und $x_0 \in D$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f hat in x_0 ein lokales Maximum (bzw. lokales Minimum) wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass für alle $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap D$ gilt:*

$$f(x) \leq f(x_0) \qquad (\textit{bzw. } f(x) \geq f(x_0)).$$

Proposition 7.16 (Notwendige Bedingung für Extremwerte) *Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $x_0 \in (a, b)$. Wenn f in x_0 ein lokales Maximum oder Minimum hat, gilt $f'(x_0) = 0$.*

Wir können mit dem Satz keine lokalen Maxima entdecken, die an den Grenzen des Definitionsbereichs liegen, wie das Beispiel $f : D = [0, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ zeigt: $f(1) = 1$ ist ein sogar globales Maximum von f aber $f'(1) = 2 \neq 0$.

Beweis: Wir betrachten nur den Fall eines lokalen Maximums in x_0. Angenommen $f'(x_0) > 0$. Es gilt für alle $h > 0$ klein genug:

$$0 \geq f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + \varphi(h)$$

und damit wegen $h > 0$

$$-\frac{\varphi(h)}{h} \geq f'(x_0).$$

Für $h \to 0$ folgt $0 \geq f'(x_0)$, ein Widerspruch. Ist $f'(x_0) > 0$, so erhalten wir für $h < 0$ mit $|h|$ ausreichend klein genauso

$$-\frac{\varphi(h)}{h} \leq f'(x_0)$$

und wieder einen Widerspruch für $h \to 0$. ∎

Um auch eine hinreichende Bedingung für die Existenz von lokalen Extrema zu erhalten, benötigen wir höhere Ableitungen.

Definition 7.17 *Sei D ein Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Falls $f' : D \to \mathbb{R}$ ebenfalls differenzierbar ist, nennen wir $(f')' = f^{(2)}$ die* zweite Ableitung *von f. Entsprechend definiert man induktiv die* n-te Ableitung *von f ($n \in \mathbb{N}_0$) durch*

$$f^{(0)} := f \qquad \text{und} \qquad f^{(n)} := (f^{(n-1)})',$$

falls $f^{(n-1)}$ differenzierbar ist und nennt f dann n-mal differenzierbar.

Die höheren Ableitungen kann man benutzen, um f durch Polynomfunktionen mit höheren Potenzen zu approximieren. Genauer gilt der folgende Satz von Taylor. Für den Beweis siehe [Wal, 10.15]

Satz 7.18 (Satz von Taylor) *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal differenzierbare Funktion. Dann gilt*

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1}$$

mit einem ξ zwischen x_0 und $x_0 + h$.

Proposition 7.19 (Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema) *Eine $(n+1)$-mal differenzierbare Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ hat ein lokales Maximum (bzw. Minimum) in $x_0 \in (a,b)$, wenn für ein gerades $k \leq n$ gilt:*

$$f^{(1)}(x_0) = \ldots = f^{(k-1)}(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(k)}(x_0) < 0 \ (\text{bzw. } f^{(k)}(x_0) > 0).$$

Beweis: Da $f^{(k)}$ differenzierbar ist, ist $f^{(k)}$ stetig und somit $f^{(k)}(\xi) \neq 0$ für ξ nahe bei x_0. Nach dem Satz von Taylor 7.18 gilt für kleine h:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} h^k.$$

Da k gerade ist, ist der zweite Summand für $h \neq 0$ stets < 0 (bzw. > 0), und damit $f(x_0)$ ein lokales Maximum (bzw. Minimum). ■

Beispiel 7.20 Welches Rechteck mit vorgegebenem Umfang U hat den größten Flächeninhalt? Die Vermutung liegt nahe, dass dies ein Quadrat ist. In der Tat: Wenn $x \in (0, \infty)$ die Seitenlänge einer Seite ist, so ist $\frac{1}{2}U - x$ die zweite Seitenlänge und damit der Flächeninhalt gleich

$$A = A(x) = x \cdot (\tfrac{1}{2}U - x) = -x^2 + \tfrac{1}{2}Ux.$$

Ableiten ergibt

$$A'(x) = -2x + \tfrac{1}{2}U,$$

also ist $x = \frac{1}{4}U$ ein Kandidat für die Seitenlänge des flächengrößten Rechtecks und die andere Seitenlänge dann ebenfalls $\frac{1}{4}U$. Das flächengrößte Rechteck ist also ein Quadrat. Wegen $A''(x) = -2 < 0$ liegt in der Tat ein lokales (und sogar globales) Maximum vor.

11:22.06.2015

7.3 Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Satz 7.21 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung) *Sei D ein Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $a, b \in D$ mit $a < b$. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$, so dass*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

gilt.

Der Mittelwertsatz besagt also, dass die mittlere Änderungsrate – der linke Term in obiger Gleichung – auf dem Intervall (a, b) gleich der momentanen Änderungsrate an einem Punkt ξ ist. Mit anderen Worten: Wenn man im Mittel 120 km/h gefahren ist, dann gab es auch mindestens einen Moment an dem man tatsächlich 120 km/h schnell war. Für den Beweis siehe z.B. [Wal, 10.10, S.254].

Korollar 7.22 *Ist D ein Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar und gilt $f' \equiv 0$, dann ist f konstant.*

Beweis: Angenommen, f wäre nicht konstant. Dann gibt es also $a, b \in D$, $a \neq b$ mit $f(a) \neq f(b)$. Also ist

$$0 \neq \frac{f(a) - f(b)}{a - b}.$$

Andererseits ist dieser Term nach Satz 7.21 gleich $f'(\xi)$ mit einem ξ zwischen a und b und damit nach Voraussetzung 0. ∎

7.4 Die Ableitung der Umkehrfunktion

Mithilfe der Ableitung erhalten wir ein Kriterium, wann eine Funktion eine Umkehrfunktion besitzt.

Proposition 7.23 *Sei D ein Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf D. Wenn*

$$f'(x) > 0 \quad (\textit{bzw. } f'(x) < 0) \quad \textit{für alle } x \in D$$

gilt, dann ist f streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend).

Beweis: Es gelte $f'(x) > 0$ für alle $x \in D$. Seien $x, y \in D$ mit $x < y$. Dann gibt es nach dem Mittelwertsatz 7.21 ein $\xi \in (x, y)$ mit

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\xi).$$

Wegen $f'(\xi) > 0$ ist $f(y) - f(x) = (y - x) \cdot f'(\xi) > 0$ und damit $f(x) < f(y)$. Also ist f streng monoton wachsend. Falls $f'(x) < 0$ für alle $x \in D$, so gilt $0 > f'(\xi)(y - x) = f(y) - f(x)$, also $f(x) > f(y)$. In diesem Fall ist f also streng monoton fallend. ∎

Beispiel 7.24 Wegen $\cos' = \sin$ und $\sin(x) > 0$ auf $(0, \pi)$ ist cos auf $(0, \pi)$ und, wie man sich leicht überlegt, auch auf $[0, \pi]$ streng monoton fallend. cos hat also eine Umkehrfunktion, wenn wir den Definitionsbereich auf $[0, \pi]$ einschränken. Wir nennen diese den Arcuscosinus

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi], \quad y \mapsto x \qquad \text{mit } x = \cos(y).$$

Genauso sieht man, dass man $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zum Beispiel auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ umkehren können. Die Umkehrfunktion heißt Arcussinus

$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}], \quad y \mapsto x \qquad \text{mit } x = \sin(y).$$

Proposition 7.25 (Ableitung der Umkehrfunktion) *Sei D ein Intervall, $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar und injektiv und $f^{-1} : f(D) \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion zu f. Falls $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in D$ gilt, so ist f^{-1} auf D differenzierbar und die Ableitung $(f^{-1})' : D \to \mathbb{R}$ an der Stelle $y_0 = f(x_0)$ ist gegeben durch*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Beispiel 7.26 (1) Die Ableitung von exp ist $\exp' = \exp$ und damit für jedes $x \in \mathbb{R}$ ungleich 0. Für die Ableitung der Umkehrfunktion log gilt demnach

$$\log'(y) = \frac{1}{\exp'(\log(y))} = \frac{1}{\exp(\log(y)} = \frac{1}{y}.$$

(2) Die Ableitung von $(0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$ ist $x \mapsto nx^{n-1}$. Damit gilt für die Ableitung der Umkehrfunktion $(0, \infty) \to (0, \infty)$, $y \mapsto \sqrt[n]{y}$ ist

$$(\sqrt[n]{y})' = \frac{1}{n \cdot (\sqrt[n]{y})^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot y^{(\frac{1}{n}-1)}.$$

Beweis: Es gilt $f \circ f^{-1}(y) = f(f^{-1}(y)) = y$. Mit der Kettenregel folgt

$$1 = (y)' = (f \circ f^{-1})'(y) = f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1})'(y)$$

also

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

■

7.5 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Wie hängen Ableitung und Integral zusammen? Die Ableitung ist die zur Integration inverse Operation, die wir mit Funktionen durchführen können. In der Tat ist nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung

$$\frac{\phi_a(x+h) - \phi_a(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f \, dx = f(\xi)$$

für ein ξ zwischen x und $x + h$. Führt man nun den Grenzübergang $h \to 0$ durch, so muss ξ gegen x konvergieren. Damit haben wir den ersten Teil des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung gezeigt:

Satz 7.27 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Teil 1) *Sei D ein Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $\phi_a : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_a^x f\,dx$ in jedem Punkt in D differenzierbar und die Ableitung ist $\phi_a' = f$.*

Definition 7.28 *Sei D ein Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Eine Funktion $F : D \to \mathbb{R}$ heißt* Stammfunktion von f, *wenn F auf D differenzierbar ist und wenn gilt $F' = f$*

Nach dem ersten Teil des Hauptsatzes 7.27 ist $\phi_a : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_a^x f\,dx$ eine Stammfunktion.
Zwei verschiedene Stammfunktionen unterscheiden sich nur um eine Konstante, denn ist F_1 und F_2 beides eine Stammfunktion von f, so gilt

$$(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f - f = 0.$$

Also ist $F_1 - F_2 = c$, $c \in \mathbb{R}$ nach Korollar 7.22 und damit $F_1 = F_2 + c$.

Satz 7.29 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Teil 2) *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und $F : D \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion. Dann ist*

$$\int_a^b f\,dx = F(b) - F(a).$$

Beweis: Da $\phi_a : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_a^x f\,dx$ ebenfalls eine Stammfunktion von f ist, gilt $F = \phi_a + c$ und damit

$$\int_a^b f\,dx = \phi_a(b) = F(b) - c$$

wegen $F(a) = \phi_a(a) + c = 0 + c = c$ folgt die Behauptung. ∎

Damit können wir auf einen Schlag ganz viele Integrale berechnen, solange wir nur eine Funktion finden, für die f die Ableitung ist!

Beispiel 7.30 Es gilt $\int_a^b x^n\,dx = \frac{1}{n+1}b^{n+1} - \frac{1}{n+1}a^{n+1}$, denn $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ ist eine Stammfunktion von $f : D \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n$

8 Flächeninhalt, Volumen und Bogenlänge

Mithilfe des Integrals wollen wir in diesem Kapitel einige Längen von Wegen, Flächeninhalte und Volumina berechnen. Zunächst übersetzen wir dazu die Rechenregeln für die Ableitung in solche fürs Integrieren.

8.1 Integralberechnungen

Aus den Regeln für die Ableitung ergeben sich direkt Regeln, mithilfe derer man auch Integrale komplizierter Funktionen manchmal berechnen kann. Je zwei Stammfunktionen einer Funktion f unterscheiden sich nur um die Addition einer Konstanten. Wir schreiben deshalb kurz $\int^x f\,dt$, wenn wir irgendeine Stammfunktion von f meinen. Desweiteren ist die Abkürzung

$$F\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

gebräuchlich.

Proposition 8.1 (Partielle Integration) *Sind $u, v : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar und die Ableitungen $u', v' : D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt für $a, b \in D$*

$$\int_a^b uv'\,dt = (u \cdot v)\Big|_a^b - \int_a^b u'v\,dt.$$

Oder kurz:

$$\int^x uv'\,dt = uv - \int^x u'v\,dt.$$

Beweis: Nach der Produktregel 7.5 ist $u \cdot v$ eine Stammfunktion von $uv' + u'v$. Also gilt nach dem Hauptsatz 7.29:

$$(u \cdot v)\Big|_a^b = \int_a^b uv'\,dx + \int_a^b u'v\,dx.$$

∎

Beispiel 8.2 Wir betrachten $(0, \infty) \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \log(t)$. Mit $u = \log(t)$, $v = t$ gilt:

$$\int^x \log t\,dt = x\log(x) - \int^x (\log t)' \cdot t\,dt = x\log(x) - \int^x 1\,dt = x\log(x) - x.$$

Proposition 8.3 (Integration durch Substitution) *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ eine differenzierbare Funktion mit stetiger Ableitung und mit $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$. Dann gilt*

$$\int_a^b f\,dx = \int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Beweis: Sei $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Nach der Kettenregel gilt

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

Nach dem Hauptsatz 7.29 gilt deshalb

$$\begin{aligned}\int_a^b f\,dx = F(b) - F(a) = F(\varphi(d)) - F(\varphi(c)) &= \int_c^d (F(\varphi(t)))'\,dt \\ &= \int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.\end{aligned}$$

■

8.2 Flächeninhalte

Mithilfe des Integrals können wir nun Flächeninhalte von Mengen der Form

$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \quad f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und stetigen Funktionen $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) \leq g(x)$ für $x \in [a,b]$ bestimmen, nämlich durch

$$A(F) = \int_a^b (g - f)\,dx.$$

In der Tat erhalten wir eine Annäherung an den Flächeninhalt, indem wir F in kleine vertikale Streifen der Länge h zerlegen und auf jedem dieser Streifen durch ein Rechteck mit Seitenlänge h und $g(x) - f(x)$ wählen. Das ergibt gerade eine Riemann-Summe für $g - f$. Für $h \to 0$ konvergiert diese gegen den Flächeninhalt auf der eine und das Integral auf der anderen Seite, womit obige Definition sinnvoll ist.

Komplizierter Flächeninhalte sind auch berechenbar, indem man die gefragte Menge in Mengen der obigen Form zerlegt. Als erste Anwendung bestimmen wir den Flächeninhalt der Kreisscheibe mit Radius r.

Beispiel 8.4 Wir möchten den Flächeninhalt der Kreisscheibe mit Radius $r > 0$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$$

mittels Integral bestimmen. Dazu beobachten wir, dass der Flächeninhalt einer Halbkreisscheibe

$$D \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$$

wegen

$$x^2 + y^2 \leq r^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad -\sqrt{r^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}$$

gegeben ist als

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$$

Wir substituieren $x = x(t) = r\sin(t)$, $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Dann ist $x'(t) = r\cos(t)$, also

$$\begin{aligned}
\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2\sin^2(t)}r\cos(t)\,dt \\
&= r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2(t)} \cdot \cos(t)\,dt = r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,dt
\end{aligned}$$

Wir integrieren $\cos^2$ mittels partieller Integration: Sei $u = \cos$, $v' = \cos$, also $v = \sin$ und $u' = -\sin$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\int^x \underbrace{\cos^2(t)}_{=u\cdot v'}\,dt &= \underbrace{\cos(x)\sin(x)}_{u\cdot v} - \int^x \underbrace{-\sin^2(t)}_{=u'\cdot v}\,dt \\
&= \cos(x)\sin(x) + \int^x 1 - \cos^2(t)\,dt \\
&= \cos(x)\sin(x) + x - \int^x \cos^2(t)\,dt
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\int^x \cos^2(t)\,dt = \tfrac{1}{2} \cdot (\cos(x)\sin(x) + x),$$

also

$$\begin{aligned}
\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx &= r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,dt \\
&= r^2\tfrac{1}{2}(\cos(\tfrac{\pi}{2})\sin(\tfrac{\pi}{2}) + \tfrac{\pi}{2}) - r^2\tfrac{1}{2}(\cos(-\tfrac{\pi}{2})\sin(-\tfrac{\pi}{2}) + \tfrac{\pi}{2}) = r^2\tfrac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Damit ist der Flächeninhalt der Kreisscheibe in der Tat $2 \cdot \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \pi r^2$.

12:29.06.2015

8.3 Volumenberechnungen

Die Idee zur Berechnung von Volumina von Körpern im Dreidimensionalen ist im Grunde die gleiche wie bei der Berechnung von Flächeninhalten: Wir zerlegen den Körper $K \subset \mathbb{R}^3$ in Scheiben, deren Flächeninhalt wir kennen und integrieren dann den Flächeninhalt aller dieser Scheiben: Sei G eine Gerade in $\mathbb{R}^3$ (für gewöhnlich wählen wir die x-Achse). Für jedes $x \in G$ sei E_x die zu G senkrechte Ebene durch x. Der Schnitt von E_x mit dem Körper K haben den Flächeninhalt $f(x)$. Dann ist das Volumen $V(K)$ unter gewissen Voraussetzungen gegeben als ein Integral über $x \mapsto f(x)$.
Genauer identifizieren wir die Gerade G mit $\mathbb{R}$ und erhalten somit eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir setzen voraus:

(1) f ist (zumindest stückweise, d.h. auf Teilintervallen) stetig

(2) K ist beschränkt, in dem Sinn, dass $f(x) = 0$ für $x < a$ oder $x > b$ (mit $a, b \in \mathbb{R}$)

Dann bilden die Riemann-Summen

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$$

zu einer Unterteilung

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

und Zwischenpunkten $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, \ldots, n-1$ eine Annäherung für das Volumen von K und natürlich gleichzeitig für das Integral $\int_a^b f\,dx$, weswegen wir

$$V(K) := \int_a^b f\,dx$$

definieren.
Besonders interessant ist, dass das Volumen von K nur von den Flächeninhalten $f(x)$ der Schnittflächen mit den Ebenen E_x abhängt – und nicht von der Form dieser Flächen. Diese Aussage nennt man das *Prinzip von Cavalieri.*

Proposition 8.5 (Prinzip von Cavalieri) *Es seien K_1, $K_2 \subset \mathbb{R}^3$ zwei Körper und G eine Gerade. Wenn für jede zu G senkrechte Ebene E gilt, dass der Flächeninhalt von $K_1 \cap E$ gleich dem von $K_2 \cap E$ ist, dann ist*

$$V(K_1) = V(K_2).$$

Beispiel 8.6 (Kugel) Sei $B_r \subset \mathbb{R}^3$ eine Kugel mit Radius $r > 0$, z.B. mit dem Ursprung $(0, 0, 0)$ als Mittelpunkt. Formal ist dies die Menge

$$B_r = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\right\}.$$

Wir wählen als Gerade G die x-Achse. Die zur (y, z)-Ebene parallele Ebene durch $(x, 0, 0)$ schneidet dann (für $x \in [-r, r]$) die Kugel B_r in Kreisscheiben

$$\left\{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + z^2 \leq r^2 - x^2\right\}$$

mit Radius $\sqrt{r^2 - x^2}$. Diese haben also den Flächeninhalt $f(x) = \pi(r^2 - x^2)$. Damit ist das Volumen der Kugel mit Radius r gegeben durch

$$\begin{aligned}
V(B_r) &= \int_{-r}^{r} f\,dx = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)dx \\
&= \pi(r^2 x - \tfrac{1}{3}x^3)\Big|_{-r}^{r} = \pi(r^3 - \tfrac{1}{3}r^3) - \pi(-r^3 + \tfrac{1}{3}r^3) \\
&= \frac{4}{3}\pi r^3
\end{aligned}$$

Das Beispiel der Kugel in $\mathbb{R}^3$ ist ein Spezialfall eines Rotationskörpers, also einer Menge, die entsteht, wenn man den Graphen einer Funktion um die x-Achse rotieren lässt und die von dieser Fläche eingeschlossenen Punkte betrachtet. Für solche Körper kann man das Volumen folgendermaßen berechnen.

Proposition 8.7 (Volumen von Rotationskörpern) *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Sei K der Körper in $\mathbb{R}^3$, der entsteht, wenn wir den Graphen von f um die x-Achse rotieren lassen. Dann hat K das Volumen*

$$V(K) = \int_a^b \pi f(x)^2 \, dx.$$

Im obigen Beispiel ist $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ mit $x \in [-r, r]$.

Beispiel 8.8 (Kreiskegel) Als nächstes betrachten wir für festes $h > 0$ und $R > 0$ den Kreiskegel, der entsteht, wenn man den Graphen der Funktion

$$f : [0,h] \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{R}{h} \cdot x,$$

also ein Stück einer Ursprungsgeraden mit Steigung R/h, um die x-Achse rotieren lässt. Das Volumen ist hier

$$\begin{aligned} V(K) &= \int_0^h \pi f(x)^2 \, dx = \int_0^h \pi \frac{R^2}{h^2} x^2 \, dx \\ &= \left(\frac{R^2}{3h^2} \pi x^3 \right) \Bigg|_0^h = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \pi R^2 \end{aligned}$$

Anstatt eines Kreiskegels kann man auch allgemeinere Kegel betrachten. Diese entstehen folgendermaßen: Man geht von einer Fläche F in einer Ebene $E_0 \subset \mathbb{R}^3$ und einem Punkt $p \notin E_0$ mit Abstand $h > 0$ von E_0 aus. Der Kegel $K(F)$ entstehe nun als die Menge der Punkte auf den Verbindungsstrecken zwischen p und Punkten in F. Eine *Pyramide* ist zum Beispiel ein Kegel mit quadratischer Grundfläche F. Für das Volumen von Kegeln kann man zeigen:

Proposition 8.9 *Sei $K = K(F)$ ein Kegel mit Grundfläche F mit Flächeninhalt $A = A(F)$ und Höhe h. Dann ist das Volumen $V(K)$ gegeben durch*

$$V(K) = \frac{1}{3} \cdot h \cdot A.$$

Insbesondere hängt $V(K)$ nur von $A(F)$ und nicht von der speziellen Form von F ab.

Beweis: Sei $x \in [0,h]$, p_x der Punkt auf dem Lot von p auf E mit Abstand x zu E und E_x die zu E_0 parallele Ebene durch p_x. Dann gilt für den Flächeninhalt $f(x)$ des Schnitts $K \cap E_x$

$$f(x) = \left(\frac{h - x}{h} \right)^2 \cdot A.$$

Damit folgt für das Volumen

$$\begin{aligned} V(K) &= \int_0^h f\,dx = \int_0^h \left(\frac{h-x}{h}\right)^2 A\,dx \\ &= \frac{1}{3} A \cdot (-h) \left(\frac{h-x}{h}\right)^3 \Bigg|_0^h \\ &= \frac{1}{3} A \cdot h. \end{aligned}$$

■

8.4 Bogenlänge

Wir widmen uns nun dem Problem, wie man z.B. die Länge der Kreislinie oder von allgemeineren gekrümmten Linien im $\mathbb{R}^2$ analytisch berechnen kann. Die Idee ist wieder, eine gekrümmte Linie durch immer kürzere gerade Streckenstücke zu approximieren und dann einen Grenzwert zu bilden.
Zunächst müssen wir uns klar machen, was eine "gekrümmte Linie" sein soll, von der wir die Länge messen wollen.

Definition 8.10 *Ein* differenzierbarer Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$*,* $t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))$ *ist eine Abbildung, so dass* $t \mapsto x(t)$ *und* $t \mapsto y(t)$ *beides differenzierbare Funktionen sind.* $\gamma(a)$ *heißt* Anfangspunkt *und* $\gamma(b)$ *heißt* Endpunkt *von* γ*.*

Beispiel 8.11 (1) Sind $p, q \in \mathbb{R}^2$, so ist

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \qquad t \mapsto p + t \cdot (q-p)$$

die Verbindungsstrecke von p nach q

(2) Die Kreislinie des Einheitskreises kann man durch den Weg

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$$

beschreiben. Hier sind Anfangs- und Endpunkt gleich dem Punkt $(1,0)$.

(3) Jeder Funktionsgraph einer differenzierbaren Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ führt auf einen Weg

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2, \qquad t \mapsto (t, f(t)).$$

Um Längen von Wegen zu messen, müssen wir zunächst wissen, wie man Längen von geraden Verbindungsstrecken misst. Sind $p = (x,y), q = (u,v) \in \mathbb{R}^2$, so ist der Abstand zwischen p und q gegeben durch den Abstand von $p - q$ zum Ursprung, also nach Pythagoras

$$\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}.$$

Identifizieren wir $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$, so ist dieser Ausdruck übrigens gerade der komplexe Betrag der Zahl

$$p - q = (x-u) + \mathrm{i}(y-v).$$

Für $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ bezeichnen wir deshalb

$$\|p\| := \sqrt{x^2 + y^2}$$

als die Länge von p. Insbesondere gilt für $a \in \mathbb{R}$ die Gleichung $\|a \cdot p\| = |a| \cdot \|p\|$ für alle $p \in \mathbb{R}^2$.

Sei nun $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))$ ein differenzierbarer Weg. Um dessen Länge anzunähern unterteilen wir $[a, b]$ in kleine Teilintervalle:

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$$

und setzen $p_k = \gamma(t_k) = (x(t_k), y(t_k)) \in \mathbb{R}^2$, $k = 0, \ldots n$. Dann ist

$$\sum_{k=0}^{n-1} \|p_{k+1} - p_k\| = \sum_{k=0}^{n-1} \|\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)\|$$

eine Annäherung für die Länge des Wegs γ, die desto besser wird, je kürzer die Intervalle $[t_k, t_{k+1}]$ werden. Wir erweitern diesen Ausdruck mit $(t_{k+1} - t_k)$ und erhalten

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} \|\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)\| &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t_{k+1} - t_k}{t_{k+1} - t_k} \|\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)\| \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \frac{1}{t_{k+1} - t_k} (\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)) \right\| (t_{k+1} - t_k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \left(\frac{x(t_{k+1}) - x(t_k)}{t_{k+1} - t_k}, \frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{t_{k+1} - t_k} \right) \right\| (t_{k+1} - t_k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \|(x'(\xi_k), y'(\xi_k))\| \cdot (t_{k+1} - t_k)
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt den Mittelwertsatz der Integralrechnung 7.21 angewendet haben, um den Differenzenquotienten durch die Ableitung an einer Zwischenstelle $\xi_k \in [t_k, t_{k+1}]$ zu ersetzen. Geht nun das Maximum der Intervalllängen $\max\{t_{k+1} - t_k \mid k = 0, \ldots, n-1\}$ gegen 0 für $n \to \infty$, so wird einerseits die Länge von γ immer besser angenähert, andererseits konvergiert der obige Ausdruck gegen das Integral

$$\int_a^b \|(x'(t), y'(t))\| \, dt.$$

Wir definieren deshalb die *Bogenlänge* (oder kurz Länge) eines differenzierbaren Wegs $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ durch

$$L(\gamma) := \int_a^b \|(x'(t), y'(t)\| \, dt.$$

Beispiel 8.12 Die Kreislinie des Kreises mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius $r > 0$ ist parametrisiert durch den Weg

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (r\cos(t), r\sin(t)).$$

Damit gilt für die Länge von γ, also den Kreisumfang:

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \|(r\cos'(t), r\sin'(t))\| \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r\sin(t))^2 + (r\cos(t))^2} \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} r \underbrace{\sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)}}_{=1} \, dt = (rx)\Big|_0^{2\pi} = 2\pi r \end{aligned}$$

Was passiert, wenn wir den Kreis mit doppelter Geschwindigkeit durchlaufen, also den Weg

$$\delta : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (r\cos(2t), r\sin(2t))$$

verwenden? Die Weglänge sollte sich dadurch natürlich nicht ändern. In der Tat ist

$$\begin{aligned} L(\delta) &= \int_0^{\pi} \|((r\cos(2t))', (r\sin'(2t))')\| \, dt \\ &= \int_0^{\pi} \sqrt{(-2r\sin(2t))^2 + (2r\cos(2t))^2} \, dt \\ &= \int_0^{\pi} 2r \int_0^{\pi} = 2\pi r. \end{aligned}$$

Allgemein kann man zeigen, dass die Weglänge sich nicht ändert, wenn man das Intervall umparametrisiert, also statt $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ den Weg $\gamma \circ \varphi$ mit einer differenzierbaren Funktion $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ mit stetiger Ableitung und $\varphi(c) = a$ und $\varphi(d) = b$ betrachtet. Das folgt direkt aus der Integration durch Substitution 8.3. Oft normalisiert man durch Umparametrisieren die "Geschwindigkeit" $\|(x'(t), y'(t)\|$ zu 1.

Die Formeln für den Umfang $U(r) = 2\pi r$ und den Flächeninhalt $A(r) = \pi r^2$ einer Kreisscheibe mit Radius r hängen auch noch anders analytisch zusammen. Wie man sieht ist der Umfang genau die Ableitung des Flächeninhalts. Das ist kein Zufall: Wenn man den Radius wenig ändert, also von r zu $r+h$ mit kleinem $h > 0$ übergeht, kommt zu $A(r+h)$ ungefähr der Flächeninhalt eines Rechtecks mit Seitenlängen h und $U(r)$ zu $A(r)$ hinzu. Die momentane Änderungsrate des Flächeninhalts ist also gegeben als

$$A'(r) = \lim_{h\to 0} \frac{A(r+h) - A(r)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h \cdot U(r)}{h} = U(r).$$

Genauso gilt für das Volumen $V(r)$ und die Oberfläche $O(r)$ der Kugel mit Radius r die Beziehung

$$O(r) = V'(r) = \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)' = 4\pi r^2.$$