Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2016
18. April 2016

Elementarmathematik II
Prof. Dr. Annette Werner
Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 1

Wochenaufgabe 1 (6 Punkte)

(a) Sei $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge und $\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Zeigen Sie, dass dann auch $\left(a_n \cdot b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

(b) Finden Sie eine Folge $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und eine Nullfolge $\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass $\left(a_n \cdot b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *keine* Nullfolge ist.

Wochenaufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl, d.h. $p \neq 1$ und teilt p ein Produkt ab, so teilt p auch (mindestens) einen der Faktoren, a oder b.

Zeigen Sie: Es existiert *kein* $q \in \mathbb{Q}$, das $q^2 = p$ erfüllt.

(b) Sei $a \in \mathbb{Q}$, $a \geq 1$, fest gewählt. Wir definieren rekursiv eine Folge durch

$$\begin{aligned} x_1 &\coloneqq a; \\ x_{n+1} &\coloneqq \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right). \end{aligned}$$

In der Elementarmathematik I (Blatt 9) wurde gezeigt: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $x_n \geq x_{n+1}$.

(i) Zeigen Sie, dass $\left[\frac{a}{x_n}, x_n\right]$ eine Intervallschachtelung ist.

Insbesondere konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ also in $\mathbb{R}$.

(ii) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ in Abhängigkeit von a.

Liegt dieser Grenzwert für $a = 7$ in $\mathbb{Q}$? Für $a = 25$?

Abgabe der Wochenaufgaben bis **12 Uhr** am **Montag, den 25. April** in die entsprechenden Kästen im 3. Stock der Robert-Mayer-Straße 6.

Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2016
18. April 2016

Elementarmathematik II
Prof. Dr. Annette Werner
Jonathan Zachhuber

Plenumsaufgabe 1

(a) Zeigen oder widerlegen Sie: Die Folge $\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gegen a, wenn

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N_\varepsilon : |a_{2n} - a| < \varepsilon.$$

(b) Zeigen oder widerlegen Sie: Die Folge $\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gegen a, wenn

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \exists N_k \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N_k : |a_n - a| < \tfrac{1}{k}.$$

(c) Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3}{k^2 + 3k + 2} \right).$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to \infty$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Hinweis: Partialbruchzerlegung!

Plenumsaufgabe 2

Die Fibonacci-Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist folgendermaßen definiert:

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1 \quad \text{und} \quad F_{n+1} = F_{n-1} + F_n \ \text{ für alle } n \geq 1.$$

(a) Bestimmen Sie die ersten 12 Glieder und Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$F_{2n+1}^2 - F_{2n}F_{2n+2} = 1.$$

(b) Nun setzen wir $a_n \coloneqq F_{2n+2}/F_{2n+1}$ und $b_n \coloneqq F_{2n+1}/F_{2n}$.

Zeigen Sie: $[a_n, b_n]$ ist eine Intervallschachtelung.

(c) Zeigen Sie: Es gilt $b_n^2 - b_n - 1 = \dfrac{1}{F_{2n}^2}$ und bestimmen Sie

$$\varphi \coloneqq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n].$$

Ist $\varphi \in \mathbb{Q}$?

Die Plenumsaufgaben werden während der Übungen in Kleingruppen bearbeitet.