Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2016
25. April 2016

Elementarmathematik II
Prof. Dr. Annette Werner
Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 2

Wochenaufgabe 1 (8 Punkte)

Begründen Sie, ob für folgende Mengen Supremum und Infimum in $\mathbb{R}$ existieren und bestimmen Sie diese im Falle der Existenz.

(a) $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \dfrac{2n^2 - 3}{n^2},\ n \in \mathbb{N} \right\}$

(b) $B = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \dfrac{1 - n^2}{n + 2},\ n \in \mathbb{N} \right\}$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst die Monotonie der Folgen $a_n = \dfrac{2n^2 - 3}{n^2}$ und $b_n = \dfrac{-n^2 + 1}{n + 2}$.

Wochenaufgabe 2 (8 Punkte)

Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende, positive, reelle Nullfolge. Zeigen Sie, dass die alternierende Reihe

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$$

konvergiert. Gehen Sie dazu in folgenden Schritten vor:

(a) Zeigen Sie zunächst, dass die Teilfolge $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fällt und dass die Teilfolge $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}_0}$ monoton wächst. Zeigen Sie zudem, dass beide Folgen beschränkt sind.

Folgern Sie, dass $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ gegen ein $L \in \mathbb{R}$ und dass $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ gegen ein $P \in \mathbb{R}$ konvergiert.

(b) Zeigen Sie, dass $L = P$ gilt.

Hinweis: Verwenden Sie, dass $S_{2n+1} = S_{2n} - a_{2n+1}$ gilt.

Folgern Sie daraus, dass die alternierende harmonische Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$ konvergiert.

Abgabe der Wochenaufgaben bis **12 Uhr** am **Montag, den 2. Mai** in die entsprechenden Kästen im 3. Stock der Robert-Mayer-Straße 6.

Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2016
25. April 2016

Elementarmathematik II
Prof. Dr. Annette Werner
Jonathan Zachhuber

Plenumsaufgabe 1

Bestimmen Sie das Infimum und Supremum, falls sie in $\mathbb{R}$ existieren, der Mengen:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = 6 + \frac{1}{n^2 + 3}, \, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{n^2 + 1}{n + 1}, \, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Plenumsaufgabe 2

Finden Sie eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so dass gilt:

(a) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton wachsend, aber nicht konvergent;

(b) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt, aber nicht konvergent;

(c) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent, aber nicht monoton;

(d) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist nicht konvergent, aber besitzt eine konvergente Teilfolge; und

(e) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hat keine konvergente Teilfolge.

Die Plenumsaufgaben werden während der Übungen in Kleingruppen bearbeitet.