Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2016
2. Mai 2016

Elementarmathematik II
Prof. Dr. Annette Werner
Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 3

Wochenaufgabe 1 (8 Punkte)

Für eine Menge X bezeichnen wir mit

$$\mathcal{P}(X) \coloneqq \{A \mid A \subseteq X\}$$

die *Potenzmenge*, d.h. die Menge aller Teilmengen, von X.

(a) Geben Sie eine injektive Abbildung $X \hookrightarrow \mathcal{P}(X)$ an.

(b) Zeigen Sie, dass es *keine* surjektive Abbildung $f\colon X \twoheadrightarrow \mathcal{P}(X)$ gibt.

Hinweis: Was passiert mit der Menge $\{a \in X \mid a \notin f(a)\}$?

(c) Zeigen Sie: $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist nicht abzählbar unendlich.

Wochenaufgabe 2 (8 Punkte)

Seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Zeigen Sie:

(a) $f + g$ ist stetig.

(b) $f \cdot g$ ist stetig.

(c) Ist $f(D) \subseteq D$, so ist $g \circ f$ stetig.

Abgabe der Wochenaufgaben bis **12 Uhr** am **Montag, den 9. Mai** in die entsprechenden Kästen im 3. Stock der Robert-Mayer-Straße 6.

Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2016
2. Mai 2016

Elementarmathematik II
Prof. Dr. Annette Werner
Jonathan Zachhuber

Plenumsaufgabe 1

(a) Geben Sie eine bijektive Abbildung von $\mathbb{Z}$ nach $\{z \in \mathbb{Z} : z \text{ gerade}\}$ an.

(b) Für eine Menge X bezeichnen wir mit

$$\mathcal{P}(X) \coloneqq \{A \mid A \subseteq X\}$$

die *Potenzmenge*, d.h. die Menge aller Teilmengen, von X.

Bestimmen Sie die Potenzmenge der leeren Menge und $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$.

Plenumsaufgabe 2

(a) Finden Sie eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}$ offen) und ein $x \in D$, so dass

(i) $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \forall x' \in D : |x - x'| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(x')| > \varepsilon$;

(ii) $\exists \delta > 0 : \forall \varepsilon > 0 : \exists x' \in D : |x - x'| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(x')| > \varepsilon$;

(iii) $\forall \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \forall x' \in D : |x - x'| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

(b) Sei f die aus der Vorlesung bekannte Heavyside-Funktion, d.h.

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Finden Sie ein $x \in \mathbb{R}$ und ein $\delta > 0$, so dass es für $\varepsilon = 1$ ein $y \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $|x - y| < \delta$ aber $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$ ist.

Finden Sie außerdem ein $x \in \mathbb{R}$, so dass es für $\varepsilon = 1$ *kein* $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Die Plenumsaufgaben werden während der Übungen in Kleingruppen bearbeitet.