**Goethe-Universität Frankfurt**
**Institut für Mathematik**
Sommersemester 2016
8. Mai 2016

**Elementarmathematik II**
Prof. Dr. Annette Werner
Jonathan Zachhuber

# Übungsblatt 4

## Wochenaufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

erfüllt. Zeigen Sie:

(a) $f(0) = 0$ und $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) Ist $f$ im Punkt 0 stetig, so ist $f$ in allen Punkten $x \in \mathbb{R}$ stetig.

## Wochenaufgabe 2 (12 Punkte)

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ an denen die folgenden Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig sind:

(a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+6x^2+11x+6}{x^2+1}, & \text{falls } x < -1, \\ \frac{x^2+2x+1}{x-7}, & \text{falls } x \in [-1, 5], \\ \frac{3x+3}{9-2x}, & \text{falls } x > 5. \end{cases}$

(b) $f(x) = \left\lfloor \dfrac{2x+1}{3} \right\rfloor$; dabei ist $\lfloor x \rfloor \coloneqq \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$.

(c) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{falls } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

---

**Abgabe** der Wochenaufgaben bis **12 Uhr** am **Dienstag, den 17. Mai** in die entsprechenden Kästen im 3. Stock der Robert-Mayer-Straße 6.

## Plenumsaufgabe 1

(a) Seien $x \in \mathbb{R}$ und $\delta > 0$ beliebig. Zeigen Sie: Es gibt ein $x' \in \mathbb{Q}$ mit $|x - x'| < \delta$.

(b) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und es gelte

$$f(q) = 0 \quad \text{für alle } q \in \mathbb{Q}.$$

Zeigen Sie: Dann ist sogar $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Folgern Sie: Sind $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen mit

$$f(q) = g(q) \quad \text{für alle } q \in \mathbb{Q},$$

so gilt $f = g$.

## Plenumsaufgabe 2

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ an denen die folgenden Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig sind:

(a) $f(x) = \lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$;

(b) $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{falls } x \geq 1, \\ 0, & \text{falls } x < 1. \end{cases}$

---

Die Plenumsaufgaben werden während der Übungen in Kleingruppen bearbeitet.