Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2016
20. Juni 2016

Elementarmathematik II
Prof. Dr. Annette Werner
Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 10

Wochenaufgabe 1 (4 Punkte)

Zeigen Sie: $\exp(0) = 1$ und für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.

Wochenaufgabe 2 (12 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Euler'sche Zahl $\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ irrational, d.h. nicht in $\mathbb{Q}$, ist.

Gehen Sie dazu in folgenden Schritten vor:

(a) Zeigen Sie, dass für alle $m \in \mathbb{N}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende Ungleichung gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{m!}{(m+k)!} < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{m^k}.$$

(b) Sei nun $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ und $m \in \mathbb{N}$ fest.

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}, n > m$ folgende Ungleichung gilt:

$$S_m < S_n < S_m + \frac{1}{(m+1)!} \sum_{k=0}^{n-(m+1)} \frac{1}{(m+1)^k}.$$

Hinweis: Verwenden Sie Teil (a).

(c) Zeigen Sie, für alle $m \in \mathbb{N}$, die Abschätzung:

$$S_m < \mathrm{e} \leq S_m + \frac{1}{m} \frac{1}{m!}.$$

Hinweis: Verwenden Sie Teil (b).

(d) Folgern Sie aus Teil (c), dass e irrational ist und dass $2{,}5 < \mathrm{e} < 2{,}75$ ist.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $m! \cdot S_m$ für alle $m \in \mathbb{N}$ ganzzahlig ist. Bringen Sie damit die Annahme, dass $\mathrm{e} = \frac{p}{q}$ eine rationale Zahl ist, zum Widerspruch!

Abgabe der Wochenaufgaben bis **12 Uhr** am **Montag, den 27. Juni** in die entsprechenden Kästen im 3. Stock der Robert-Mayer-Straße 6.

Plenumsaufgabe 1

(a) Geben Sie ein Polynom an, das

(i) nur Nullstellen in $\mathbb{N}$ hat;

(ii) nur Nullstellen in $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ hat;

(iii) nur Nullstellen in $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ hat;

(iv) nur Nullstellen in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ hat;

(v) nur Nullstellen in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ hat.

(b) Gibt es ein Polynom mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$, das Nullstellen in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ hat? Gibt es ein Polynom mit Koeffizienten in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, das Nullstellen in $\mathbb{Z}$ hat?

Plenumsaufgabe 2

Sei $\zeta_n = \exp(2\pi \mathrm{i}/n)$ eine n-te Einheitswurzel. Zeigen Sie:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \zeta_n^i = 0.$$

Die Plenumsaufgaben werden während der Übungen in Kleingruppen bearbeitet.