Aufgabe 1

[10 Punkte]

(a) Untersuchen Sie, ob die Folge

$$a_n = \sqrt[n]{\mathrm{e}}$$

konvergiert. Bestimmen Sie im Fall der Konvergenz den Grenzwert für $n \to \infty$.

(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine rationale Cauchy-Folge und $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge, die gegen einen rationalen Grenzwert $a \in \mathbb{Q}$ konvergiert.

Beweisen oder widerlegen Sie: Dann konvergiert auch die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $a \in \mathbb{Q}$.

(c) Geben Sie ein Beispiel für eine rationale Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n \in \mathbb{Q}$, an, die einen Grenzwert in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ besitzt.

Aufgabe 2 [10 Punkte]

Gegeben sei die Funktion

$$
\begin{aligned}
f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}, \\
x &\mapsto \begin{cases} x \exp\left(\frac{1}{x}\right), & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}
\end{aligned}
$$

(a) Begründen Sie, ob die Folge $\left(f\left(-\frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(b) Bestimmen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Funktion f differenzierbar ist und berechnen Sie an diesen Punkten die Ableitung.

Aufgabe 3

[10 Punkte]

Wir definieren den Tangens von x, falls $\cos(x) \neq 0$, als

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

(a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist $\tan(x)$ differenzierbar? Berechnen Sie an diesen Punkten die Ableitung $\tan'(x)$.

(b) Zeigen Sie das Additionstheorem für den Tangens: Falls $\cos(x)$, $\cos(y)$ und $\cos(x+y)$ von 0 verschieden sind, gilt

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}.$$

(c) Begründen Sie, weshalb es ein $x \in [0, \pi/2]$ gibt, sodass $\tan(x) = 2016$ ist.

Aufgabe 4

[10 Punkte]

(a) Zeichnen Sie folgende Menge in $\mathbb{C}$:

$$\left\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0, |z| \geq 1, |\operatorname{Re} z| \leq \frac{1}{2}\right\}.$$

(b) Sei $z = \dfrac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$. Berechnen Sie z^{2016}.

(c) Seien $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ganze Zahlen und $s_1 = a^2 + b^2$ sowie $s_2 = c^2 + d^2$.
Zeigen Sie: Das Produkt $s_1 \cdot s_2$ ist auch Summe zweier Quadrate, d.h.

$$\exists x, y \in \mathbb{Z} : (a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) = x^2 + y^2.$$

Aufgabe 5

[10 Punkte]

In den folgenden 5 Blöcken ist genau eine Aussage wahr. Entscheiden Sie ohne Begründung, welche der Aussagen wahr ist. Wenn Sie genau die wahre Aussage ankreuzen, erhalten Sie **2 Punkte**, für eine falsche Antwort wird **1 Punkt abgezogen**, für keine Antwort gibt es **0 Punkte**. Dabei ist die Gesamtpunktzahl der Aufgabe mindestens 0 Punkte.

(a) Genau eine der folgenden Aussagen ist wahr. Kreuzen Sie diese an.

- ☐ Die Menge $\mathbb{N}$ ist abzählbar.
- ☐ Die Potenzmenge von $\mathbb{N}$ ist abzählbar.
- ☐ Es gibt eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und der Potenzmenge von $\mathbb{N}$.

(b) Genau eine der folgenden Aussagen ist wahr. Kreuzen Sie diese an.

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt:

- ☐ Ist f in x_0 stetig, so ist f in x_0 differenzierbar.
- ☐ Ist f in x_0 differenzierbar, so ist f in x_0 stetig.
- ☐ Ist f injektiv, so ist f stetig.

(c) Genau eine der folgenden Aussagen ist wahr. Kreuzen Sie diese an.

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge reeller Zahlen. Dann gilt:

- ☐ Konvergiert $(a_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$, so konvergiert auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- ☐ Konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so konvergiert auch $(a_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$.
- ☐ Ist $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so konvergiert auch $(a_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$.

(d) Gegeben sei die Menge $A = \{z \in \mathbb{C} : |z - \mathrm{i} + 1| = 2\}$ in der komplexen Zahlenebene.

Genau eine der folgenden Aussagen ist wahr. Kreuzen Sie diese an.

- ☐ A ist ein Kreis um $1 - \mathrm{i}$ mit Radius $\sqrt{2}$.
- ☐ A ist ein Kreis um $1 - \mathrm{i}$ mit Radius 2.
- ☐ A ist ein Kreis um $\mathrm{i} - 1$ mit Radius 2.

(e) Genau eine der folgenden Aussagen ist wahr. Kreuzen Sie diese an.

- ☐ $\forall x \in \mathbb{R} : \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$
- ☐ $\forall x \in \mathbb{R} : \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos(x)$
- ☐ $\forall x \in \mathbb{R} : \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos(x)$