Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2016/17
17. Oktober 2016

Lineare Algebra
Prof. Dr. Martin Möller
Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Wir erinnern an die Abkürzungszeichen $\wedge$ ("und") und $\vee$ ("oder")

(a) Bestimmen Sie die Negation der folgenden Aussagen:

(i) $\exists n \in \mathbb{N} : (n \text{ ist gerade}) \wedge (n > 2)$

(ii) $\forall x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N} : x + y \geq 1$

(b) Bestimmen Sie die Kardinalität der Menge

$$M := \big(\{n \in \mathbb{N} : n \text{ gerade}\} \cap \{k \in \mathbb{N} : k < 10\}\big) \setminus \{2, 3\}.$$

(c) Was ist die Negation der Aussage "Jedes Übungsblatt schafft Unzufriedene"?

(i) "Es gibt kein Übungsblatt, mit dem alle zufrieden sind."

(ii) "Es gibt einen, der mit allen Übungsblättern zufrieden ist."

(iii) "Es gibt ein Übungsblatt, mit dem alle zufrieden sind."

(iv) "Alle sind mit jedem Übungsblatt zufrieden."

(v) "Es gibt keinen, der mit allen Übungsblättern zufrieden ist."

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien I, M Mengen und für alle $i \in I$ seien $A_i \subseteq M$ beliebige Teilmengen von M. Sei außerdem $B \subseteq M$.

Zeigen Sie:

(a) $\displaystyle\bigcup_{i \in I}(A_i \cap B) = \Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) \cap B$

(b) $\displaystyle\bigcap_{i \in I}(A_i \cup B) = \Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big) \cup B$

(c) $\displaystyle\bigcap_{i \in I} \overline{A_i} = \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$

(d) $\displaystyle\bigcup_{i \in I} \overline{A_i} = \overline{\bigcap_{i \in I} A_i}$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung und $A, B \subseteq X$, sowie $C, D \subseteq Y$.

Zeigen Sie:

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;

(b) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$;

(c) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$;

(d) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

Geben Sie zudem ein Beispiel an, bei dem die Inklusion echt ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ Abbildungen.

(a) Zeigen Sie: $g \circ f$ ist injektiv $\implies$ f ist injektiv.

(b) Zeigen Sie: $g \circ f$ ist surjektiv $\implies$ g ist surjektiv.

(c) Finden Sie Beispiele für f und g, so dass

  (i) f injektiv ist, aber $g \circ f$ nicht injektiv ist.

  (ii) g surjektiv ist, aber $g \circ f$ nicht surjektiv ist.

  (iii) $g \circ f$ injektiv ist, aber g nicht injektiv ist.

  (iv) $g \circ f$ surjektiv ist, aber f nicht surjektiv ist.

Griechisches Alphabet

Alpha	α	A	Ny	ν	N
Beta	β	B	Xi	ξ	Ξ
Gamma	γ	Γ	Omikron	o	O
Delta	δ	Δ	Pi	π, ϖ	Π
Epsilon	ε, ϵ	E	Rho	ρ, ϱ	P
Zeta	ζ	Z	Sigma	σ	Σ
Eta	η	H	Tau	τ	T
Theta	θ, ϑ	Θ	Ypsilon	υ	Υ
Iota	ι	I	Phi	ϕ, φ	Φ
Kappa	κ	K	Chi	χ	X
Lambda	λ	Λ	Psi	ψ	Ψ
My	μ	M	Omega	ω	Ω

Abgabe bis **10:00** am **Montag, den 24. Oktober** in den Kasten Ihres jeweiligen Tutoriums.