Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2016/17
24. Oktober 2016

Lineare Algebra
Prof. Dr. Martin Möller
Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (3 Punkte)

(a) Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und $U \subset G$ eine Teilmenge. Zeigen Sie:

$$U \text{ ist eine Untergruppe} \iff U \neq \emptyset \text{ und } \forall x, y \in U : x \circ y^{-1} \in U.$$

(b) Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe, in der für alle $x \in G$ gilt: $x = x^{-1}$. Zeigen Sie: $(G, \circ)$ ist abelsch.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Seien $(G, \circ)$ und $(H, *)$ Gruppen und $f\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie:

(a) f ist injektiv $\iff \ker f = \{e_G\}$.

(b) Das Bild von f ist eine Untergruppe von H.

(c) Zu $g \in G$ definieren wir
$$\varphi_g\colon G \to G, x \mapsto g \circ x \circ g^{-1}.$$
Zeigen Sie: φ_g ist ein Isomorphismus.

(d) Zeigen Sie: $\Phi\colon G \to S_G, g \mapsto \varphi_g$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

(e) Sei nun G abelsch. Bestimmen Sie $\ker \Phi$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeigen Sie:

(a) Die Menge $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$ ist ein Ring (bezüglich der Einschränkung von $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{R}$).

(b) Die Menge $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\mathbb{Z} := \{a + \frac{1}{2}b \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$ ist ein Gruppe (bezüglich der Einschränkung von $+$ auf $\mathbb{R}$).

Ist $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ ein Ring (bezüglich der Einschränkung von $\cdot$ auf $\mathbb{R}$)?

Aufgabe 4 (3 Punkte)

(a) Sei $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 2 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in S_6$. Schreiben Sie π als Verkettung von Transpositionen.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie $\#S_n$.

Abgabe bis **10:00** am **Montag, den 31. Oktober** in den Kasten Ihres jeweiligen Tutoriums.