Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2016/17
31. Oktober 2016

Lineare Algebra
Prof. Dr. Martin Möller
Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Seien R, S Ringe. Eine Abbildung $f\colon R \to S$ heißt *Ringhomomorphismus*, falls

- $f\colon (R,+) \to (S,+)$ ein Gruppenhomomorphismus ist,
- für alle $a, b \in R$ gilt: $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$ und
- $f(1) = 1$.

Wir bezeichnen $f^{-1}(0)$ als *Kern* des Ringhomomorphismus f.

(a) Sei R ein beliebiger Ring.

Zeigen Sie: Es gibt genau einen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to R$.

(b) Geben Sie alle Gruppenhomomorphismen $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ an.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie: $2\mathbb{Z} := \{z \in \mathbb{Z} \mid z \text{ ist gerade}\}$ ist eine Untergruppe von $\mathbb{Z}$.

(b) Geben Sie Kern und Bild des Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ an.

(c) Geben Sie Kern und Bild des Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to \mathbb{F}_2$ an.

(d) Geben Sie Kern und Bild des Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to \mathbb{F}_4$ an.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

(a) Seien $R \subseteq S$ kommutative Ringe, sowie $R[X]$ der Polynomring zu R.

Zeigen Sie: Für $s \in S$ ist die Auswertungsabbildung

$$E_s\colon R[X] \to S, \quad f \mapsto f(s)$$

ein Ringhomomorphismus.

(b) Zeigen Sie: Die Menge $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$ ist ein Körper (bezüglich der Einschränkung von $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{R}$).

(c) Geben Sie einen surjektiven Ringhomomorphismus $\mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ an.

Ist dieser Ringhomomorphismus injektiv?

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei R ein Ring. Dann nennen wir

$$R^\times := \{r \in R \mid r \text{ ist invertierbar}\}$$

die Einheitengruppe von R.

(a) Sei $\Phi\colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus.

Zeigen Sie: Es gilt $\Phi(R^\times) \subseteq S^\times$ und die Einschränkung

$$\Phi^\times\colon R^\times \to S^\times, \quad r \mapsto \Phi(r)$$

von Φ auf die Einheitengruppe ist ein Gruppenhomomorphismus.

(b) Sei k ein Körper. Bestimmen Sie $k[X]^\times$.

(c) Bestimmen Sie $\mathbb{Z}[X]^\times$.

Abgabe bis **10:00** am **Montag, den 7. November** in den Kasten Ihres jeweiligen Tutoriums.