Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2016/17
31. Oktober 2016

Lineare Algebra
Prof. Dr. Martin Möller
Jonathan Zachhuber

Tutoriumsaufgaben zu Blatt 1

Aufgabe 1

Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung.

(a) Geben Sie die zu f gehörige Bildfunktion $f\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$, sowie die Urbildfunktion $f^{-1}\colon \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ explizit an.

(b) Zeigen Sie: Für alle $M \subseteq X$ gilt: $f^{-1}(f(M)) \supseteq M$ und falls f injektiv ist, gilt Gleichheit.

(c) Zeigen Sie: Für alle $N \subseteq Y$ gilt: $f(f^{-1}(N)) \subseteq N$ und falls f surjektiv ist, gilt Gleichheit.

(d) Geben Sie Beispiele für f an, so dass diese Inklusionen echt sind.

Aufgabe 2

(a) Sei M eine endliche Menge. Bestimmen Sie $\#\mathcal{P}(M)$.

(b) Sei M eine beliebige Menge.

Zeigen Sie: Es gibt keine surjektive Abbildung $f\colon M \to \mathcal{P}(M)$.

Aufgabe 3

(a) Seien Y, Z Mengen und $g\colon Y \to Z$ eine Abbildung.

Zeigen Sie: g ist genau dann injektiv, wenn für alle Mengen X und Abbildungen $f_1, f_2\colon X \to Y$ gilt:

$$(g \circ f_1 = g \circ f_2) \implies f_1 = f_2.$$

(b) Seien X, Y Mengen und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung.

Zeigen Sie: f ist genau dann surjektiv, wenn für alle Mengen Z und Abbildungen $g_1, g_2\colon Y \to Z$ gilt:

$$(g_1 \circ f = g_2 \circ f) \implies g_1 = g_2.$$

(c) Geben Sie ein Beispiel für Mengen X, Y, Z und Abbildungen g, f_1, f_2 wie oben an, so dass $g \circ f_1 = g \circ f_2$ aber $f_1 \neq f_2$ gilt.

(d) Geben Sie ein Beispiel für Mengen X, Y, Z und Abbildungen f, g_1, g_2 wie oben an, so dass $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ aber $g_1 \neq g_2$ gilt.

Dieses Blatt wird nur in den Tutorien besprochen und ist nicht abzugeben.