Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2016/17
7. November 2016

Lineare Algebra
Prof. Dr. Martin Möller
Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Zeigen Sie, dass A als Element in $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{Q})$ invertierbar ist.

Ist A als Element in $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{F}_2)$ invertierbar?

(b) Bestimmen Sie $\#\,\mathrm{Mat}_2(\mathbb{F}_2)$.

(c) Geben Sie alle Elemente aus $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ an.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei K ein Körper und $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} \in \mathrm{Mat}_{n,m}(K)$. Dann definieren wir die *transponierte Matrix*, als $A^t := (a_{ji})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$.

Seien nun $A \in \mathrm{Mat}_{n,m}(K)$ und $B \in \mathrm{Mat}_{m,l}(K)$. Zeigen Sie: $(AB)^t = B^t A^t \in \mathrm{Mat}_{l,n}(K)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$.

(a) Wir definieren die *oberen Dreiecksmatrizen*

$$\Delta(n) := \{A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathrm{Mat}_n(K) : a_{ij} = 0 \text{ falls } i > j\}.$$

Zeigen Sie: $\Delta(n) \subseteq \mathrm{Mat}_n(K)$ ist ein (Unter-)Ring.

(b) Finden Sie ein Element $A \in \mathrm{Mat}_2(K)$, so dass $A \neq 0$, aber $A^2 = 0$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien $i, j \in \mathbb{N}$. Dann definieren wir das *Kronecker-δ*, als

$$\delta\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \{0,1\}, \quad (i,j) \mapsto \delta_{i,j} := \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper. Dann definieren wir zu $\pi \in S_n$ die *Permutationsmatrix*

$$A_\pi := (\delta_{i,\pi(j)})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathrm{Mat}_n(K).$$

Zeigen Sie: Es gilt $A_{\pi\circ\rho} = A_\pi \cdot A_\rho$ für alle $\pi, \rho \in S_n$ und folgern Sie daraus, dass für alle $\pi \in S_n$ die Matrix $A_\pi \in \mathrm{GL}_n(K)$ ist und die Abbildung $\pi \mapsto A_\pi$ ein Gruppenhomomorphismus $S_n \to \mathrm{GL}_n(K)$ ist.

Abgabe bis **10:00** am **Montag, den 14. November** in den Kasten Ihres jeweiligen Tutoriums.