Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2016/17
13. November 2016

Lineare Algebra
Prof. Dr. Martin Möller
Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien $t \in \mathbb{C}$ und $A_t \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{C})$ gegeben durch

$$A_t = \begin{pmatrix} t^2+1 & 0 & 2t \\ t & t^2+1 & 0 \\ (t+1)^2 & t^2+1 & 2(t+1) \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des homogenen LGS $A_t \cdot x = 0$ in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Q})$ durch

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 \\ -1 & 8 & -4 \\ 7 & 12 & -8 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des homogenen LGS $A \cdot x = 0$. Ist $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q})$?

Betrachten Sie nun A als Element von $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{F}_2)$ und bestimmen Sie die Lösungsmenge des homogenen LGS $A \cdot x = 0$ über dem Körper $\mathbb{F}_2$. Ist $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2)$?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. Zeigen Sie: Gibt es einen Vektor $x \in \mathbb{Q}^n \setminus \{0\}$ mit Einträgen in $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$, so dass $A \cdot x = 0$, so gibt es auch einen Vektor $y \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ mit Einträgen in $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, so dass $A \cdot y = 0$.

(b) Finden Sie eine Matrix A mit ganzzahligen Einträgen und ein x mit Einträgen in $\mathbb{F}_2 \setminus \{0\}$, so dass A, als $\mathbb{F}_2$-Matrix aufgefasst, $A \cdot x = 0$ erfüllt, es aber *keinen* Vektor y mit Einträgen in $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ gibt, so dass A, als $\mathbb{Q}$-Matrix aufgefasst, $A \cdot y = 0$ erfüllt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie

$$Z \coloneqq \{A \in \mathrm{Mat}_n(K) \mid \forall B \in \mathrm{Mat}_n(K) : AB = BA\}.$$

Abgabe bis **10:00** am **Montag, den 21. November** in den Kasten Ihres jeweiligen Tutoriums.