Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2016/17
21. November 2016

Lineare Algebra
Prof. Dr. Martin Möller
Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei M eine Menge und K ein Körper.

(a) Für $f, g\colon M \to K$ definieren wir $f + g\colon M \to K$ durch $\big(f+g\big)(x) = f(x) + g(x)$ und für $k \in K$ definieren wir $k \cdot f\colon M \to K$ durch $\big(kf\big)(x) = k \cdot f(x)$.

Zeigen Sie, dass $\mathrm{Abb}(M, K) \coloneqq \{f\colon M \to K \text{ Abbildung}\}$ dadurch eine K-Vektorraumstruktur erhält.

(b) Wir definieren

$$\mathrm{Abb}^1(K) \coloneqq \{f \text{ ist Auswertungsabbildung zu einem Polynom aus } [X]\} \subseteq \mathrm{Abb}(K, K).$$

Für $f \in \mathrm{Abb}(K, K)$ definieren wir nun die Skalarmultiplikation $k \cdot f\colon K \to K$ durch $\big(kf\big)(x) = f(kx)$.

Zeigen Sie, dass $\mathrm{Abb}^1(K)$ mit dieser Skalarmultiplikation ein Vektorraum ist, aber $\mathrm{Abb}(K, K)$ durch diese Skalarmultiplikation *kein* Vektorraum wird.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Sei M eine Menge und K ein Körper. Für $x \in M$ sei

$$\delta_x\colon M \to X, \quad y \mapsto \delta_x(y) \coloneqq \begin{cases} 1, & \text{falls } x = y, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für welche Mengen M ist $\big[\{\delta_x \mid x \in M\}\big] = \mathrm{Abb}(M, K)$?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei M eine Menge und $\mathcal{P}(M)$ die Potenzmenge. Dann definieren wir die *symmetrische Differenz* von $A, B \in \mathcal{P}(M)$, als

$$A \Delta B \coloneqq (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Zeigen Sie: $(\mathcal{P}(M), \Delta)$ ist eine abelsche Gruppe und geben Sie dieser eine $\mathbb{F}_2$-Vektorraumstruktur.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Überprüfen Sie, ob es sich bei folgenden Teilmengen um Untervektorräume handelt:

(a) $A \coloneqq \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(2) = 0\} \subseteq \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$;

(b) $B \coloneqq \{f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \mid f(2) \neq 0\} \subseteq \mathrm{Abb}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$;

(c) $C \coloneqq \mathrm{Abb}(M, \mathbb{R}) \subseteq \mathrm{Abb}(M, \mathbb{C})$ (als $\mathbb{C}$-Vektorraum);

(d) $D \coloneqq \mathrm{Abb}(M, \mathbb{R}) \subseteq \mathrm{Abb}(M, \mathbb{C})$ (als $\mathbb{R}$-Vektorraum);

(e) $E \coloneqq \{a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid a \text{ ist Nullfolge}\} \subseteq \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

Abgabe bis **10:00** am **Montag, den 28. November** in den Kasten Ihres jeweiligen Tutoriums.