Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2016/17
28. November 2016

Lineare Algebra
Prof. Dr. Martin Möller
Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 7

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 6}$$

(a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{Q}^6$ des homogenen LGS $Ax = 0$.

(b) Bestimmen Sie $\dim \mathbb{L}$ und geben Sie eine Basis B von $\mathbb{L}$ an.

(c) Ergänzen Sie B zu einer Basis des $\mathbb{Q}^6$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit einer Basis $(v_1, \dots, v_n)$.

Untersuchen Sie, ob die folgenden Tupel von Elementen aus V linear unabhängig sind, ein Erzeugendensystem oder eine Basis bilden.

(a) $(v_1 + v_2, v_2 + v_3, \dots, v_{n-1} + v_n)$;

(b) $(v_1, v_1 + v_2, \dots, v_1 + \cdots + v_n)$.

Ergänzen Sie jeweils die linear unabhängigen Tupel, die noch keine Basis bilden, zu einer Basis von V.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei M eine Menge und K ein Körper.

(a) Bestimmen Sie $\dim \operatorname{Abb}(M, K)$.

(b) Sei nun $M = \mathbb{N}_0$ und $K = \mathbb{R}$.

Wir betrachten für $a, b \in \mathbb{R}$ die Fibonacci-Folgen: $\operatorname{Abb}(\mathbb{N}_0, \mathbb{R}) \ni F_{a,b}$:

$$F_{a,b}(0) = a, \quad F_{a,b}(1) = b \quad \text{und} \quad F_{a,b}(n) = F_{a,b}(n-1) + F_{a,b}(n-2) \quad \text{für } n \geq 2.$$

Bestimmen Sie $\dim\bigl[\{F_{a,b} : (a,b) \in \mathbb{R}^2\}\bigr]$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei V ein K-Vektorraum und $B \subset V$. Zeigen Sie:

(a) B ist genau dann eine Basis von V, wenn B ein Erzeugendensystem von V ist und jede echte Teilmenge $C \subsetneqq B$ kein Erzeugendensystem von V ist.

(b) B ist genau dann eine Basis von V, wenn B eine linear unabhängige Teilmenge von V ist und jede echte Obermenge $C \supsetneqq B$ keine linear unabgängige Teilmenge von V ist.

Abgabe bis **10:00** am **Montag, den 5. Dezember** in den Kasten Ihres jeweiligen Tutoriums.