Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2016/17
5. Dezember 2016

Lineare Algebra
Prof. Dr. Martin Möller
Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 8

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei K ein Körper und $d \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie: $K[X]_{\leq d} := \{f \in K[X] : \deg(f) \leq d\} \subset K[X]$ ist ein Untervektorraum und bestimmen Sie $\dim K[X]_{\leq d}$.

(b) Sei nun $a \in K$ und $E_a \colon K[X] \to K$ die zugehörige Auswertungsabbildung.

Zeigen Sie: $U_d(a) := \{f \in K[X]_{\leq d} : E_a(f) = 0\} \subset K[X]_{\leq d}$ ist ein Untervektorraum und bestimmen Sie $\dim U_d(a)$.

(c) Sei V ein Komplement zu $U_d(a)$ in $K[X]_{\leq d}$. Bestimmen Sie $\dim V$ durch Angabe einer Basis.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Seien $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $U_1, \dots, U_n \subseteq V$ endlichdimensionale Unterräume. Zeigen Sie:

(a) $\dim(U_1 + \cdots + U_n) + \sum_{k=1}^{n-1} \dim\big((U_1 + \cdots + U_k) \cap U_{k+1}\big) = \sum_{k=1}^{n} \dim U_k$.

(b) Ist $n = 3$, so gilt:

$$\begin{aligned}\dim(U_1 + U_2 + U_3) + \dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_2 \cap U_3) + \dim(U_1 \cap U_3)\\ \leq \dim U_1 + \dim U_2 + \dim U_3 + \dim(U_1 \cap U_2 \cap U_3).\end{aligned}$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst $(U_1 \cap U_3) + (U_2 \cap U_3) \subseteq (U_1 + U_2) \cap U_3$.

Finden Sie ein Beispiel für U_1, U_2, U_3, so dass die Ungleichung strikt ist, d.h. keine Gleichheit gilt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Geben Sie alle geordneten Basen von $\mathbb{F}_2^2$ an.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{F}_2^n$ genau $\prod_{k=0}^{n-1}(2^n - 2^k)$ geordnete Basen hat.

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit geordneter Basis $B \coloneqq (v_1, \dots, v_n)$. Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix Θ_{BC} für

(a) $C \coloneqq (v_1, v_1 + v_2, \dots, v_1 + \dots + v_n)$ und

(b) $C \coloneqq (v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)})$ für ein $\sigma \in S_n$.

Abgabe bis **10:00** am **Montag, den 12. Dezember** in den Kasten Ihres jeweiligen Tutoriums.