Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2016/17
16. Januar 2017

Lineare Algebra
Prof. Dr. Martin Möller
Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 12

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $a \in \mathbb{Q}$ und

$$A(a) \coloneqq \begin{pmatrix} a & 3 & 5 \\ 1 & a+1 & a+2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\det A(a)$ und bestimmen Sie für welche $a \in \mathbb{Q}$ die Matrix invertierbar ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei K ein Körper. Bestimmen Sie für welche $x_1, \dots, x_n \in K$ die Matrix

$$M(x_1, \dots, x_n) \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Fälle $n = 2$ und $n = 3$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien K ein Körper, $A \in K^{n \times n}$, $B \in K^{n \times k}$, $C \in K^{k \times n}$ und $D \in K^{k \times k}$. Dann definieren wir die Blockmatrix

$$M \coloneqq \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Umgekehrt können wir jedes $M \in K^{m \times m}$ für $m = n + k$ in solche Blöcke zerlegen.

(a) Seien zudem $A' \in K^{n \times n}$, $B' \in K^{n \times k}$, $C' \in K^{k \times n}$ und $D' \in K^{k \times k}$.

Zeigen Sie:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$$

(b) Zeigen Sie:

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(D).$$

(c) Sei nun $A \in \mathrm{GL}_n(K)$. Zeigen Sie:

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(D - CA^{-1}B).$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}$ seien die Tridiagonalmatrizen $M_n = (M_n(i,j))_{i,j}$ durch

$$M_n(i,j) \coloneqq \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \text{ oder } i = j-1, \\ -1, & \text{falls } i = j+1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Determinanten die Fibonacci-Rekursion erfüllen, das heißt:

$$\det M_0 = \det M_1 = 1, \quad \text{und} \quad \forall n \in \mathbb{N} : \det M_{n+2} = \det M_{n+1} + \det M_n.$$

Abgabe bis **10:00** am **Montag, den 23. Januar** in den Kasten Ihres jeweiligen Tutoriums.