Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2016/17
30. Januar 2017

Lineare Algebra
Prof. Dr. Martin Möller
Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 14

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ und

$$A(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

(a) Für welche $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ ist $A(a,b,c)$ diagonalisierbar?

(b) Berechnen Sie in diesen Fällen eine Diagonalmatrix $D(a,b,c)$ und eine invertierbare Matrix $Q(a,b,c) \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, so dass $Q(a,b,c)^{-1}A(a,b,c)Q(a,b,c) = D(a,b,c)$ gilt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und $\alpha \in \mathrm{End}(V)$.

Zeigen Sie: Existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $\alpha^n = \mathrm{id}$, so ist α diagonalisierbar.

(b) Finden Sie einen $\mathbb{R}$-Vektorraum V und einen Endomorphismus $\alpha \in \mathrm{End}(V)$ und ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $\alpha^n = \mathrm{id}$, aber α *nicht* diagonalisierbar ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{5\times 5}.$$

Geben Sie $\mathrm{CharPoly}_A$ an und bestimmen Sie die Jordan-Normalform von A.

Hat $\mathbb{C}^5$ eine Basis aus Eigenvektoren von A?

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Sei $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ mit $\mathrm{CharPoly}_\varphi(t) = (t+1)^3(t-1)^2(t-2)$ und Minimalpolynom $P(t) = (t+1)(t-1)^2(t-2)$.

Wie sieht die Jordan-Normalform von φ aus?

Abgabe bis **10:00** am **Montag, den 6. Februar** in den Kasten Ihres jeweiligen Tutoriums.