Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2016/17
6. Februar 2017

Lineare Algebra
Prof. Dr. Martin Möller
Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 15

Aufgabe 1

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus.

Zeigen Sie: Wenn $\operatorname{Kern}(f) \cap \operatorname{Bild}(f) \neq \{0\}$ gilt, dann ist f nicht diagonalisierbar.

Aufgabe 2

Sei $d \in \mathbb{N}_0$ und $V_d := \{f \in \mathbb{Q}[X] : \deg(f) \leq d\}$ der $\mathbb{Q}$-Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq d$. Weiter seien die linearen Abbildungen

$$\Phi\colon V_2 \to V_4, \quad f \mapsto f \cdot (X^2 - 1)$$

und

$$\Psi\colon V_4 \to \mathbb{Q}^2, \quad f \mapsto (f(1), f(-1))$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrizen von Φ und Ψ bezüglich der Basen $B_2 := \{1, X, X^2\}$ von V_2, $B_4 := \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$ von V_4 und der Standardbasis von $\mathbb{Q}^2$.

(b) Zeigen Sie, dass Ψ surjektiv und dass Φ injektiv ist.

(c) Zeigen Sie, dass $\operatorname{Bild}\Phi = \operatorname{Kern}\Psi$ ist.

Aufgabe 3

Wir definieren

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C} \right\} \subset \mathbb{C}^{2\times 2}.$$

(a) Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Zeigen Sie: Mit der Addition und Multiplikation von Matrizen wird Q zu einem Ring.

(c) Zeigen Sie: Jedes Element in $Q \setminus \{0\}$ hat ein multiplikatives Inverses.

(d) Ist Q ein Körper?

Aufgabe 4

Sei $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Abbildungen von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{R}$ und

$$I = \{f \in V : f(\overline{z}) = -f(z)\} \quad \text{bzw.} \quad R = \{f \in V : f(\overline{z}) = f(z)\}.$$

Zeigen Sie:

(a) I und R sind Untervektorräume von V.

(b) Die Abbildung $\Psi\colon V \to V,\ f \mapsto [z \mapsto \frac{1}{2}(f(z) + f(\overline{z}))]$ ist linear und eine Projektion mit Bild R.

(c) $V = I \oplus R$.

Dieses Blatt wird nicht mehr zur Korrektur abgegeben. Es besteht allerdings aus alten Klausuraufgaben.