Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2016/17
6. Februar 2017

Lineare Algebra
Prof. Dr. Martin Möller
Jonathan Zachhuber

Tutoriumsaufgaben zu Blatt 15

Aufgabe 1

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Fassen Sie A als Matrix in $\mathbb{C}^{3\times 3}$ auf. Bestimmen Sie die Jordannormalform J von A und ein $T \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ mit $T^{-1}AT = J$.

(b) Fassen Sie nun A als Matrix in $\mathbb{F}_2^{3\times 3}$ auf. Ist A dann diagonalisierbar?

Aufgabe 2

Sei A eine Matrix mit Einträgen aus $\mathbb{R}$ und

$$\mathrm{CharPoly}_A(X) = (X-1)^3(X+1)^4 \quad \text{und Minimalpolynom} \quad m_A(X) = (X-1)^2(X+1)^2.$$

(a) Welche Abmessungen hat die Matrix A?

(b) Beschreiben Sie die Jordanblöcke (Länge und Eigenwert), die in der Jordannormalform von A auftreten können.

(c) Wie kann die Jordannormalform von A aussehen?

Aufgabe 3

(a) Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + z &= 1 \end{aligned}$$

mit $x, y, z \in \mathbb{F}_2$.

(b) Wie viele Lösungen hat die Gleichung $x + y + z + u + v + w = 1$ in $\mathbb{F}_2$?

(c) Seien $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{F}_2$ mit $n \geq 1$. Geben Sie die Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$$

in $\mathbb{F}_2$ in Abhängigkeit von den Parametern $a_1, \ldots, a_n, b$ an.

Aufgabe 4

(a) Zeigen oder widerlegen Sie: Für alle $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ ist $\det A \in \mathbb{Z}$.

(b) Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Matrix mit den Einträgen $a_{ij} = \max(i,j)$.

Berechnen Sie $\det A$.

Dieses Blatt wird nur in den Tutorien besprochen und ist nicht abzugeben.