Hauptklausur

Lineare Algebra

(BaM-LA1, L3M-AG)

Prof. Dr. Martin Möller // Jonathan Zachhuber

WiSe 2016/17 // 20. Februar 2017

Kontrollieren Sie, ob Sie alle 6 Aufgabenblätter erhalten haben, und geben Sie alle Blätter zusammen ab.

Versehen Sie alle Blätter mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Beantworten Sie die Fragen in dem dafür vorgesehenen Bereich auf den Aufgabenblättern. Wenn der Platz nicht ausreicht, schreiben Sie bitte auf der Rückseite weiter.

Wenn Sie zusätzliche Blätter verwenden, versehen Sie diese mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Wenn nicht anders angegeben, sind alle Antworten zu begründen. Aussagen aus der Vorlesung und den Übungsblättern dürfen verwendet werden. Falls Sie eine Teilaufgabe nicht lösen können, dürfen Sie dennoch das Ergebnis zur Lösung anderer Aufgabenteile benutzen.

Bearbeitungszeit: 120 Minuten Hinreichend zum Bestehen: **45 Punkte**

Name: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Studiengang: ______________________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Gesamt
Punkte	15	15	15	15	20	20	100
erreicht							

Hauptklausur

Lineare Algebra

(BaM-LA1, L3M-AG)

Prof. Dr. Martin Möller // Jonathan Zachhuber

WiSe 2016/17 // 20. Februar 2017

Kontrollieren Sie, ob Sie alle 6 Aufgabenblätter erhalten haben, und geben Sie alle Blätter zusammen ab.

Versehen Sie alle Blätter mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Beantworten Sie die Fragen in dem dafür vorgesehenen Bereich auf den Aufgabenblättern. Wenn der Platz nicht ausreicht, schreiben Sie bitte auf der Rückseite weiter.

Wenn Sie zusätzliche Blätter verwenden, versehen Sie diese mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Wenn nicht anders angegeben, sind alle Antworten zu begründen. Aussagen aus der Vorlesung und den Übungsblättern dürfen verwendet werden. Falls Sie eine Teilaufgabe nicht lösen können, dürfen Sie dennoch das Ergebnis zur Lösung anderer Aufgabenteile benutzen.

Bearbeitungszeit: 120 Minuten Hinreichend zum Bestehen: **45 Punkte**

Name: ______________________

Matrikelnummer: ______________________

Studiengang: ______________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Gesamt
Punkte	15	15	15	15	20	20	100
erreicht							

Aufgabe 1

[15 Punkte]

Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Wir setzen

$$\mathrm{O}(n) \coloneqq \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : A^T A = \mathrm{Id}\}.$$

(a) Zeigen Sie: $\mathrm{O}(n)$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

(b) Bestimmen Sie alle möglichen reellen Zahlen, die als Determinante einer Matrix in $\mathrm{O}(n)$ auftreten können.

Belegen Sie dies jeweils durch Angabe einer geeigneten Matrix.

(c) Sei $\mathrm{SO}(2) \coloneqq \{A \in \mathrm{O}(2) : \det A = 1\}$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{SO}(2)$ eine Untergruppe von $\mathrm{O}(2)$ ist und dass

$$\mathrm{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : a^2 + b^2 = 1 \right\}.$$

Aufgabe 2

[15 Punkte]

Sei $f\colon \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$ gegeben durch $f(x) = Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie eine Basis von $\operatorname{Kern} f$.

(b) Geben Sie alle $x \in \mathbb{Q}^4$ mit

$$f(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{an.}$$

(c) Fassen Sie A nun als Matrix in $\mathrm{Mat}_4(\mathbb{F}_2)$ auf und betrachten Sie $f\colon \mathbb{F}_2^4 \to \mathbb{F}_2^4$, $f(x) = Ax$.
Wie viele Elemente $x \in \mathbb{F}_2^4$ liegen in $\operatorname{Bild} f$?

Aufgabe 3

[15 Punkte]

Sei $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{3\times 3}$.

(a) Fassen Sie A als Matrix in $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{C})$ auf und bestimmen Sie die Jordannormalform J von A und ein $T \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ mit $T^{-1}AT = J$.

(b) Fassen Sie nun A als Matrix in $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{F}_2)$ auf und entscheiden Sie, ob A diagonalisierbar ist. Begründen Sie Ihre Behauptung.

Aufgabe 4

[15 Punkte]

Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann definieren wir

$$M_{2n}(a,b) \coloneqq \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & b & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & b & \cdots & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2n}(\mathbb{Z}).$$

(a) Bestimmen Sie $\det M_2(a,b)$ und $\det M_4(a,b)$.

(b) Bestimmen Sie $\det M_{2n}(a,b)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) Für welche $a, b \in \mathbb{Z}$ ist $M_{2n}(a,b) \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{Q})$?

Aufgabe 5

[20 Punkte]

Sei $V = \mathbb{C}^{2\times 2} = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ mit Basis

$$B \coloneqq \left\{ B_{11} \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_{12} \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_{21} \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_{22} \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Wir betrachten den Endomorphismus

$$\varphi\colon V \to V, \quad A \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot A.$$

(a) Geben Sie die Abbildungsmatrix $A_{BB}(\varphi)$ an.

(b) Bestimmen Sie $\dim \operatorname{Kern} \varphi$ und $\operatorname{Rang} \varphi$.

(c) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von φ.

(d) Ist φ diagonalisierbar?

Aufgabe 6

[20 Punkte]

Zeigen oder widerlegen Sie folgende Behauptungen (jeweils 4 Punkte):

(a) Sei V ein K-Vektorraum und $\pi \in \operatorname{End}(V)$. Dann gilt:

$$\pi \circ \pi = 0 \iff \operatorname{Bild} \pi \subseteq \operatorname{Kern} \pi.$$

(b) Es gibt eine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ mit $f(X) = X^2$.

(c) Je zwei 2-dimensionale Untervektorräume von $\mathbb{C}^3$ haben nichttrivialen Schnitt.

(d) Jede Matrix mit nicht-negativen reellen Einträgen hat eine nicht-negative Determinante.

(e) Jede invertierbare Matrix in $\mathbb{C}^{4\times 4}$ ist diagonalisierbar.