

1. Übungsblatt
Abgabe am 25.10.2018

1. Es sei M eine Menge mit einer Abbildung

$$*: M \times M \rightarrow M,$$

so dass gilt

- i) $*$ ist assoziativ,
- ii) es gibt ein $e \in M$, so dass $e * a = a$ für alle $a \in M$,
- iii) zu jedem $a \in M$ gibt es ein $a' \in M$, so dass $a' * a = e$.

Zeigen Sie, dass dann jeweils auch $a * e = a$ und $a * a' = e$ für alle $a \in M$ gilt. Eine Gruppe kann also über obige, schwächere Eigenschaften definiert werden. (4 P.)

2. Es sei G eine kommutative endliche Gruppe mit neutralem Element e .

- i) Zeigen Sie, dass $\prod_{g \in G} g = e$, falls es kein $e \neq h \in G$ mit $h^2 = e$ gibt.
- ii) Zeigen Sie, dass $\prod_{g \in G} g = e$ auch gilt, wenn es **mehr** als ein Element $h \neq e$ mit $h^2 = e$ gibt.
- iii) Zeigen Sie, dass $\prod_{g \in G} g = h$, wenn genau ein $h \neq e$ mit $h^2 = e$ existiert.

(4 P.)

3. Es sei G eine Gruppe, $U \subseteq G$ eine Untergruppe und h ein beliebiges Element von G . Zeigen Sie, dass

$$hUh^{-1} = \{huh^{-1} \mid u \in U\}$$

eine Untergruppe von G ist.

(4 P.)

4. Bestimmen Sie für jedes $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ alle Gruppen mit genau n Elementen bis auf Isomorphismus. (4 P.)