Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2018/19
25. Oktober 2018

Elementarmathematik I
Dr. Alexander Ivanov
Dr. Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (6 Punkte)

(a) Die *untere Gaußklammer* $\lfloor x \rfloor$ einer reellen Zahl x bezeichnet die größte ganze Zahl y mit $y \leq x$. Wir betrachten die Abbildung

$$u\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad n \mapsto \lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor.$$

Bestimmen Sie zu jedem $n \in \mathbb{Z}$ die *Urbilder von n unter u*, d.h. die Menge $u^{-1}(n) = \{m \in \mathbb{Z} : u(m) = n\}$.

Hinweis: u^{-1} bezeichnet *nicht* die Umkehrabbildung – diese existiert nicht.

(b) Finden Sie eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$.

Hinweis: Sie können diese mit Hilfe der Abbildung aus Teil (a) in eine geschlossene Form bringen.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Beweisen Sie durch vollständige Induktion.

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^3$.

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt: $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es seien zwei identische Gläser gegeben. Im ersten Glas sind x ml Wasser enthalten, im zweiten Glas x ml Saft ($x > 1$). Nun entnehmen wir dem ersten Glas 1 ml Wasser und schütten diesen ins zweite Glas, rühren um und schütten 1 ml des Gemischs zurück ins erste Glas.

Zeigen Sie: Das erste Glas enthält nun genau so viel Saft, wie das zweite Glas Wasser enthält.

Abgabe bis **10:00** am **Donnerstag, den 1. November** in den Kasten Ihres jeweiligen Tutoriums.