Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2018/19
1. November 2018

Elementarmathematik I
Dr. Alexander Ivanov
Dr. Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

(b) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

(c) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq k \leq n$ gilt $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

(a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion die *geometrische Summenformel*:

Für alle $q \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Dabei bezeichne $\mathbb{N}_0 \coloneqq \mathbb{N} \cup \{0\}$ die Menge der nicht-negativen ganzen Zahlen.

(b) Sei nun $g > 1$ eine natürliche Zahl.

Berechnen Sie die g-adische Entwicklung der Zahl $g^{n+1} - 1$.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Finden Sie eine natürliche Zahl x, die alle der folgenden Bedingungen erfüllt:

(a) x hat in der Binärdarstellung genau neun Stellen;

(b) x hat in der 3-adischen Darstellung an der ersten Stelle (von links gezählt) eine 2;

(c) x hat in der 4-adischen Darstellung an der dritten Stelle (von links gezählt) eine 2;

(d) x hat in der 9-adischen Darstellung an der letzten Stelle (von links gezählt) eine 3.

Geben Sie x im Dezimalsystem an. Ist diese Zahl eindeutig?

Abgabe bis **10:00** am **Donnerstag, den 8. November** in den Kasten Ihres jeweiligen Tutoriums.