

2. Übungsblatt
Abgabe am 1.11.2018

1. Wir betrachten $\mathbb{Z}$ als additive Untergruppe von $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie:
 - i) Jedes Element von $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ hat endliche Ordnung.
 - ii) Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ besitzt $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ genau eine Untergruppe der Ordnung n . Diese ist zyklisch. (4 P.)
2. Es sei $G = GL(2, \mathbb{R})$ die Gruppe der invertierbaren 2×2 -Matrizen über den reellen Zahlen. Welche der folgenden Teilmengen von G sind Untergruppen, welche sind Normalteiler?
 - i) $H_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}^* \right\}$
 - ii) $H_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}^* \right\}$
 - iii) $H_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$
 - iv) $H_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}, a^2 \neq 1 \right\}$ (4 P.)
3. Es sei R ein Integritätsring und $\Phi: R[X] \rightarrow R[X]$ ein Ringhomomorphismus mit $\Phi|_R = \text{id}_R$. Zeigen Sie, dass Φ genau dann ein Automorphismus ist, wenn es ein $a \in R^*$ und ein $b \in R$ gibt mit $\Phi(X) = aX + b$. (4 P.)
4. Es sei $R \neq \{0\}$ ein kommutativer Ring und $a \neq 0$ ein *nilpotentes* Element von R , d.h. es gilt $a^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Zeigen Sie, dass die Einheitengruppe R^* eine echte Untergruppe der Einheitengruppe des Polynomrings $R[X]$ ist. (4 P.)