Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2018/19
29. November 2018

Elementarmathematik I
Dr. Alexander Ivanov
Dr. Jonathan Zachhuber

Tutoriumsaufgaben zu Blatt 7

Aufgabe 1

(a) Finden Sie $\varepsilon > 0$, so dass $U_\varepsilon(0) \cap U_\varepsilon(1) = \varnothing$.

(b) Sei $\varepsilon = \frac{1}{1000}$. Finden Sie ein $x \in \mathbb{Q}$ und ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für $n \geq N$ gilt: $\frac{1}{n} \in U_\varepsilon(x)$.

(c) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge. Zeigen Sie: Dann ist auch die Folge $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

Gilt auch die Umkehrung?

Aufgabe 2

Geben Sie in (a) bis (e) rationale Folgen mit den jeweiligen Eigenschaften an (im Falle divergent jeweils mit einem beschränkten und einem unbeschränkten Beispiel in (b) bis (e)).

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und divergent.

(b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent sowie $a_{2n} = b_{2n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent sowie $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

(d) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent sowie $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

(e) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind jeweils divergent sowie $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

Aufgabe 3

Entscheiden Sie für jede der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ob diese konvergent ist, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) $a_n = n^2$;

(b) $a_n = (-1)^n$;

(c) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$;

(d) $a_n = \dfrac{n+1}{2n-1}$;

(e) $a_n = \dfrac{n^3}{n^2+1}$;

(f) $a_n = \dfrac{n^3}{n^4+1}$.

Dieses Blatt wird nur in den Tutorien besprochen und ist nicht abzugeben.