Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2018/19
29. November 2018

Elementarmathematik I
Dr. Alexander Ivanov
Dr. Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 7

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Entscheiden Sie für jede der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ob diese konvergent ist und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) $a_n = n^n$;

(b) $a_n = \dfrac{n^2-1}{n(n-1)}$;

(c) $a_n = (-1)^n - \frac{1}{n}$;

(d) $a_n = \dfrac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n} k$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge rationaler Zahlen. Wir nennen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *beschränkt*, falls es ein $c \in \mathbb{Q}$ gibt, so dass $|a_n| < c$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Wir nennen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine *Nullfolge*, falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert 0 ist.

(a) Zeigen Sie: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so ist auch die Folge $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

(b) Sei nun $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge. Ist dann auch die Folge $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ notwendigerweise konvergent?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien $x, y \in \mathbb{Q}$ verschiedene rationale Zahlen.

(a) Zeigen Sie, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $U_\varepsilon(x) \cap U_\varepsilon(y) = \varnothing$.

(b) Folgern Sie, dass der Grenzwert einer konvergenten Folge eindeutig ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge. Zeigen Sie: Dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

(b) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen.

Zeigen Sie: Dann konvergiert auch $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Hinweis: Verwenden Sie Teil (a).

Abgabe bis **10:00** am **Donnerstag, den 6. Dezember** in den Kasten Ihres jeweiligen Tutoriums.