

7. Übungsblatt
Abgabe am 6.12.2018

1. Bestimmen Sie das Minimalpolynom von

$$\alpha = \sqrt{2 + \sqrt[3]{2}}$$

über $\mathbb{Q}$.

(4 P.)

2. i) Es sei L/K eine endliche Körpererweiterung, so dass $p = [L : K]$ eine Primzahl ist. Zeigen Sie, dass es ein $\alpha \in L$ mit $L = K(\alpha)$ gibt.
ii) Es sei L/K eine Körpererweiterung. Gegeben seien $\alpha, \beta \in L$, die algebraisch über K sind, so dass $[K(\alpha) : K] = n$ und $[K(\beta) : K] = m$ teilerfremd sind. Zeigen Sie, dass dann $[K(\alpha, \beta) : K] = mn$ gilt. (4 P.)
3. Es sei L/K eine Körpererweiterung und $\alpha \in L$ algebraisch über K . Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt:

$$[K(\alpha^n) : K] \geq \frac{1}{n} [K(\alpha) : K].$$

(4 P.)

4. Zeigen oder widerlegen Sie: Es gibt einen Ring R , der ein Ideal $I \subset R$, $I \neq (0)$, besitzt, so dass ein Isomorphismus $R \rightarrow R/I$ existiert. (4 P.)