

8. Übungsblatt
Abgabe am 13.12.2018

1. Es sei L/K eine endliche Körpererweiterung vom Grad 2^k für ein $k \geq 1$. Zeigen Sie, dass jedes Polynom $f \in K[X]$ vom Grad 3, das in L eine Nullstelle hat, bereits eine Nullstelle in K hat. (4 P.)
2. Zeigen Sie, dass jeder algebraisch abgeschlossene Körper unendlich viele Elemente besitzt. (4 P.)
Bemerkung: Das folgt aus Aufgabe 4 vom 6. Übungsblatt. Man kann diese Aussage aber auch beweisen, ohne die Existenz unendlich vieler normierter Primpolynome über einem algebraisch abgeschlossenen Körper zu verwenden.
3. Es sei L/K eine Körpererweiterung. Zeigen Sie, dass zwei Elemente $\alpha, \beta \in L$ genau dann algebraisch über K sind, wenn $\alpha + \beta$ und $\alpha \cdot \beta$ algebraisch über K sind. (4 P.)
4. Es sei L/K eine endliche Körpererweiterung vom Grad $[L : K] = n$. Für ein $\alpha \in L$ gebe es Automorphismen $\sigma_i : L \rightarrow L$, $i = 1, \dots, n$, mit $\sigma_i|_K = \text{id}_K$ für alle i und $\sigma_i(\alpha) \neq \sigma_j(\alpha)$ für alle i, j mit $i \neq j$. Zeigen Sie, dass $L = K(\alpha)$. (4 P.)