Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2018/19
13. Dezember 2018

Elementarmathematik I
Dr. Alexander Ivanov
Dr. Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 9

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

keine Cauchyfolge ist.

Hinweis: Betrachten Sie die Differenz $S_{2n} - S_n$.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

in $\mathbb{R}$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Hinweis: Berechnen Sie zunächst S_2, S_3 und S_4 und versuchen Sie ein Muster zu erkennen und dieses zu beweisen.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine monoton fallende (d.h. $a_k \geq a_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$), positive, reelle Nullfolge. Zeigen Sie, dass die alternierende Reihe

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$$

konvergiert. Gehen Sie dazu in folgenden Schritten vor:

(a) Zeigen Sie zunächst, dass die Teilfolge $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton fällt und dass die Teilfolge $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton wächst. Zeigen Sie zudem, dass beide Folgen beschränkt sind.

Folgern Sie, dass $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen ein $L \in \mathbb{R}$ und dass $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen ein $P \in \mathbb{R}$ konvergiert.

(b) Zeigen Sie, dass $L = P$ gilt.

Hinweis: Verwenden Sie, dass $S_{2n+1} = S_{2n} - a_{2n+1}$ gilt.

Folgern Sie daraus, dass die alternierende harmonische Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$ konvergiert.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Finden Sie das multiplikative Inverse zu $[5]$ in $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, d.h. ein $n \in \mathbb{Z}$, so dass $[5] \cdot [n] = [1]$ in $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ ist.

Zeigen Sie außerdem, dass $[4]$ ein Nullteiler in $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ ist, d.h. finden Sie ein $n \in \mathbb{Z}$, so dass $[n] \neq [0]$ aber $[4] \cdot [n] = [0]$ in $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ ist.

Abgabe bis **10:00** am **Donnerstag, den 20. Dezember** in den Kasten Ihres jeweiligen Tutoriums.