Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2018/19
20. Dezember 2018

Elementarmathematik I
Dr. Alexander Ivanov
Dr. Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 10

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Sei K ein Körper.

(a) Zeigen Sie: Für alle $f(X), g(X) \in K[X] \setminus \{0\}$ gilt

$$\operatorname{grad}(f(X) \cdot g(X)) = \operatorname{grad}(f(X)) + \operatorname{grad}(g(X)).$$

(b) Zeigen Sie, dass der Polynomring $K[X]$ nullteilerfrei ist, dass also für alle $f(X), g(X) \in K[X]$ gilt: Aus $f(X) \cdot g(X) = 0$ folgt $f(X) = 0$ oder $g(X) = 0$.

(c) Zeigen Sie: Für alle $f(X), g(X) \in K[X] \setminus \{0\}$ gilt

$$\operatorname{grad}(f(X) + g(X)) \leq \max\{\operatorname{grad}(f(X)), \operatorname{grad}(g(X))\}.$$

Finden Sie Polynome $f(X)$ und $g(X)$, so dass keine Gleichheit gilt!

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $K[X]$ der Polynomring über einem Körper K.

(a) Zeigen Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $(X - 1) \mid (X^n - 1)$.

(b) Bestimmen Sie $t_2(X)$ und $t_3(X)$ mit

$$(X - 1)t_2(X) = X^2 - 1 \quad \text{und} \quad (X - 1)t_3(X) = X^3 - 1.$$

(c) Bestimmen Sie allgemein $t_n(X)$ mit

$$(X - 1)t_n(X) = X^n - 1.$$

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Sei $f(X) = X^3 - X$. Bestimmen Sie alle Nullstellen von f über $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Berechnen Sie Real- und Imaginärteil von $(1 + \mathrm{i})(1 - \mathrm{i})$, sowie $\dfrac{1 + \mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}}$.

Aufgabe 5 (2 Punkte)

Zeichnen Sie die Nullstellen des Polynoms $X^5 - 1$ in der komplexen Ebene.

Verbinden Sie diese zu einem Weihnachtsstern!

Abgabe bis **10:00** am **Donnerstag, den 17. Januar** in den Kasten Ihres jeweiligen Tutoriums.