

10. Übungsblatt
Abgabe am 17.1.2019

1. Es sei $L = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$.
 - i) Zeigen Sie, dass L ein Zerfällungskörper des Polynoms $X^4 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ über $\mathbb{Q}$ ist.
 - ii) Bestimmen Sie $[L : \mathbb{Q}]$ und alle $\mathbb{Q}$ -Automorphismen von L .
 - iii) Zeigen Sie, dass $L = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2} + i)$ ist. (4 P.)
2. Es sei K ein Körper und $f \in K[X]$ ein Polynom vom Grad $n > 0$. Es sei L ein Zerfällungskörper von f über K . Zeigen Sie:
 - i) $[L : K]$ ist ein Teiler von $n!$.
 - ii) Gilt $[L : K] = n!$, so ist f irreduzibel. (4 P.)
3. Es sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$ und $M = K(a_1, \dots, a_n)$ eine algebraische Erweiterung von K . Zeigen Sie, dass M/K genau dann separabel über K ist, wenn $M = K(a_1^p, \dots, a_n^p)$ gilt. (4 P.)
4. Es seien $K \subset L \subset M$ algebraische Körpererweiterungen, wobei M/K normal sei. Zeigen Sie:

$$[L : K]_s = \#\text{Hom}_K(L, M).$$

Dabei bezeichne $\#\text{Hom}_K(L, M)$ die Anzahl der Körperhomomorphismen $\sigma: L \rightarrow M$ mit $\sigma|_K = \text{id}_K$. (4 P.)

b. w.

Weihnachtsspezial

5. Wir wollen zeigen, dass eine algebraische Körpererweiterung L/K genau dann einfach ist, wenn sie nur endlich viele Zwischenkörper zulässt.
- i) Beweisen Sie diese Aussage zunächst für den Fall, dass K endlich ist. Im Folgenden können wir also annehmen, dass K unendlich ist.
- ii) Es sei $L = K(\alpha)$ und $f \in K[X]$ das Minimalpolynom von α über K . Identifizieren Sie die Menge der Zwischenkörper von L/K mit einer Teilmenge der Teiler von f , aufgefasst als Polynom in $L[X]$. Da es nur endlich viele Teiler von f in $L[X]$ gibt, ist damit eine Richtung der Äquivalenz bewiesen.
- iii) Wir nehmen nun an, dass L/K nur endlich viele Zwischenkörper zulässt. Um zu zeigen, dass L/K einfach ist, reduzieren Sie auf den Fall, dass L über K von zwei Elementen α und β erzeugt wird. Für $L = K(\alpha, \beta)$ können Sie nun die Körper $K(\alpha + c\beta)$ mit $c \in K$ betrachten.