

11. Übungsblatt
Abgabe am 24.1.2019

1. Es sei K ein endlicher Körper. Zeigen Sie, dass das Produkt aller Elemente aus K^* den Wert -1 ergibt. Folgern Sie, dass für jede Primzahl p gilt: $p \mid ((p-1)! + 1)$. (4 P.)
2. Für eine Primzahl p sei $L = \mathbb{F}_p(X, Y)$ der Funktionenkörper in zwei Variablen über $\mathbb{F}_p$. Es sei $K = \sigma(L)$ das Bild des Frobenius-homomorphismus $\sigma: L \rightarrow L$ mit $\sigma(a) = a^p$. Berechnen Sie die Grade $[L : K]$ und $[L : K]_s$ und zeigen Sie, dass L/K nicht einfach ist, d.h. nicht von einem Element erzeugt wird. (4 P.)
3. Es sei p eine Primzahl und $n \in \mathbb{N}$.
 - i) Zeigen Sie, dass ein irreduzibles Polynom $f \in \mathbb{F}_p[X]$ genau dann ein Teiler von $X^{p^n} - X$ ist, wenn der Grad von f ein Teiler von n ist.
 - ii) Zeigen Sie, dass $X^{p^n} - X$ in $\mathbb{F}_p[X]$ mit dem Produkt über alle irreduziblen normierten Polynome $f \in \mathbb{F}_p[X]$ übereinstimmt, für die $\deg f$ ein Teiler von n ist. (4 P.)
4. i) Bestimmen Sie $\text{Aut}_{\mathbb{Q}}(L)$ für $L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. Ist $L/\mathbb{Q}$ galoissch?
ii) Es sei $\zeta = \exp(2\pi i/5) \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $L = \mathbb{Q}(\zeta)$ galoissch über $\mathbb{Q}$ ist und bestimmen Sie alle Untergruppen H von $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ und die zugehörigen Zwischenkörper L^H . (4 P.)