

12. Übungsblatt
Abgabe am 31.1.2019

1. Es sei K ein Körper, $f \in K[X]$ ein irreduzibles, separables Polynom und L ein Zerfällungskörper von f über K , so dass L/K eine endliche Galoiserweiterung ist. Zeigen Sie: Ist L/K abelsch, so gilt $L = K(\alpha)$ für jede Nullstelle $\alpha \in L$ von f . (4 P.)
2. Es sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$ und $a \in K$. Ferner sei $f = X^p - X - a$. Zeigen Sie:
 - i) f ist separabel.
 - ii) Hat f eine Nullstelle in K , so zerfällt f über K bereits vollständig in Linearfaktoren.
 - iii) f ist genau dann irreduzibel über K , wenn f in K keine Nullstelle hat. In diesem Fall ist der Zerfällungskörper L von f eine zyklische Erweiterung von K vom Grad p .
(Hinweis: Zeigen Sie, dass für eine Nullstelle c von f die Abbildung $\sigma \mapsto \sigma(c) - c$ einen injektiven Gruppenhomomorphismus $\text{Gal}(L/K) \rightarrow \mathbb{F}_p$ vermittelt.) (4 P.)
3. Es sei L/K eine endliche Galoiserweiterung. Weiter seien L_1, L_2 Zwischenkörper zu L/K , welche zu den Untergruppen $H_1, H_2 \subset \text{Gal}(L/K)$ korrespondieren mögen. Zeigen Sie: Für $\sigma \in \text{Gal}(L/K)$ ist $\sigma(L_1) = L_2$ äquivalent zu der Gleichung $\sigma H_1 \sigma^{-1} = H_2$. (4 P.)
4. Es sei L/K eine Galoiserweiterung sowie E ein Zwischenkörper mit der Eigenschaft, dass auch E/K galoissch ist. Zeigen Sie:
 - i) Die Restriktionsabbildung $\varphi: \text{Gal}(L/K) \rightarrow \text{Gal}(E/K)$ ist stetig.
 - ii) Es trägt $\text{Gal}(E/K)$ die Quotiententopologie, d.h. eine Teilmenge $V \subset \text{Gal}(E/K)$ ist genau dann offen, wenn $\varphi^{-1}(V)$ offen in $\text{Gal}(L/K)$ ist. (4 P.)